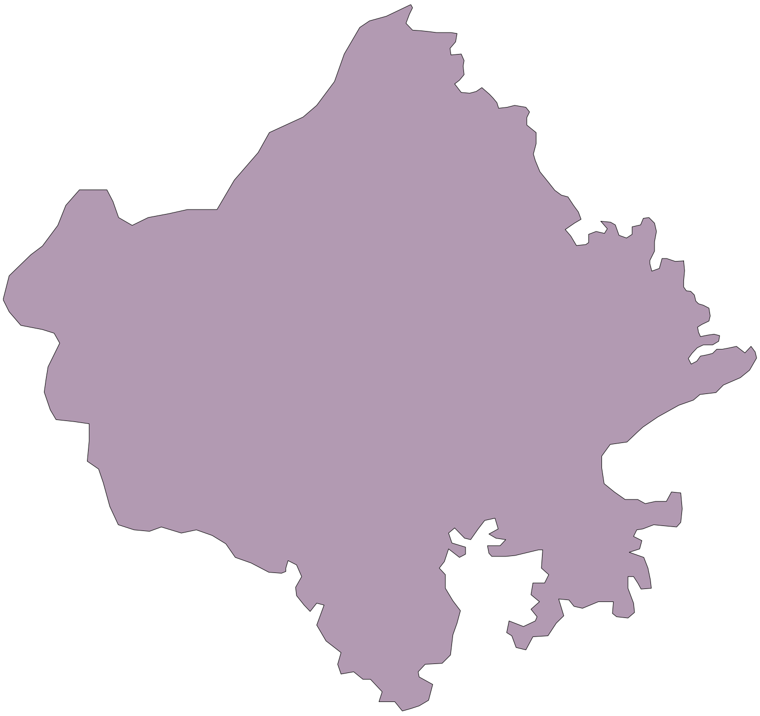
jk"Vªh; ek/;fed f'k{kk vfHk;ku

R M S A



ek/;fed Lrj izf'k{k.k

ekWM~;wy foKku

%% vkeq[k %%

माध्यमिक शिक्षा के सार्वजनीकरण के लिए पूरे देश में राष्ट्रीय माध्यमिक शिक्षा अभियान की शुरूआत हो चुकी है। इस दिशा में विभिन्न स्तरों पर कार्यक्रम प्रारंभ किए गए हैं। इस अभियान के उद्देश्यों की संप्राप्ति की दिशा में शिक्षक – प्रशिक्षण कार्यक्रम अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है। माध्यमिक शिक्षा के सार्वजनीकरण एवं उसमें गुणवत्ता सुनिश्चित करने की दिशा में वृहद् दायित्व, राज्य कर्मठ, सृजनशील एवं ज्ञानवान शिक्षकों के कंधों पर ही है। इसी दायित्व के संदर्भ में शिक्षकों का अभिनवन करने के लिए प्रशिक्षण कार्यक्रम समूचे राज्य में आयोजित किए जा रहे हैं। इन प्रशिक्षण कार्यक्रमों का प्रमुख उद्देश्य शिक्षकों को ज्ञान सृजन की प्रक्रिया को गुणवत्तापूर्ण बनाने के लिए अभिप्रेरित करना है। ज्ञान के सच्चे सृजन में सदैव पारस्परिकता अंतर्निहित होती है। ज्ञान सृजन की विद्यालयीन प्रक्रिया द्विदिशीय ही होनी चाहिए जिसमें विद्यार्थी अधिक सक्रिय हो ताकि उनका सर्वांगीण विकास हो सके।

इस मॉड्यूल को सीमित समय में ही निर्मित करने में निदेशक, एस.आई.ई.आर.टी. श्रीमती लक्ष्मी ननमा, संयुक्त निदेशक (प्रशिक्षण) श्री उमाकांत ओझा के मार्गदर्शन तथा श्री प्रदीप पानेरी के समन्वयन तथा विभाग के अधिकारियों एवं आई.ए.एस.ई., सी.टी.ई. के विशेषज्ञों की महत्त्वपूर्ण भूमिका रही है। ये सभी बधाई के पात्र हैं। यह मॉड्यूल शिक्षक प्रशिक्षण कार्यक्रम से सीधे जुड़े हुए समस्त शिक्षकों के लिए उपयोगी होगा।

मुझे पूर्ण विश्वास है कि यह प्रशिक्षण मॉड्यूल अपने उद्देश्यों की पूर्ति में पूर्ण सहायक होगा।

HkkLdj ,-

Ikor

निदेशक
माध्यमिक शिक्षा राजस्थान,

बीकानेर (राज.)

राष्ट्रीय माध्यमिक शिक्षा अभियान (RMSA)
सन्दर्भ व्यक्तियों हेतु मॉड्यूल निर्माण कार्यकारी दल एवं मुख्य संदर्भ व्यक्ति

1.	डॉ. अनिल कुमार जैन	–	दल प्रभारी एसोसियेट प्रोफेसर, विद्याभवन शिक्षक महाविद्यालय
2.	डॉ. बलिदान जैन	–	असिस्टेन्ट प्रोफेसर एल.एम.टी.टी. कॉलेज, डबोक
3.	डॉ. सतीश मंगल	–	असिस्टेन्ट प्रोफेसर केशव विद्यापीठ झालडोली
4.	डॉ. जे.डी. सिंह	–	प्रवक्ता, सी.टी.ई. झामडोली
5.	श्री अरविन्द कुमार चौपड़ा	–	सेवानिवृत प्राचार्य
6.	श्री चन्द्रप्रकाश मंत्री	–	सेवानिवृत व्याख्याता
7.	श्रीमती रेणुबाला चौधरी	–	वरिष्ठ व्याख्याता S.I.E.R.T., Udaipur
8.	श्री शक्तिसिंह रावत	–	प्राध्यापक, रा.उ.अ.शि.संस्थान अजमेर
9.	श्री रामनिवास वशिष्ठ	–	प्राध्यापक, रा.उ.अ.शि.संस्थान (अजमेर)
10.	श्री लियाकत हुसैन	–	प्रवक्ता I.A.S.E., बीकानेर
11.	श्रीमती रंजना कोठारी	–	अनुसंधान अधिकारी, S.I.E.R.T., Udaipur
12.	श्री तरुण सगखंशी	–	प्रवक्ता, लो.मा.ति.शि.प्र. महाविद्यालय, डबोक

अनुक्रमणिका

xf.kr & xf.kr dh izd`fr ,oa fodkl

1-1 Hkwfedk &

प्रस्तुत अध्याय में यह प्रयास किया गया है कि सभी शिक्षक इस ज्ञान से परिचित हो सकें कि जिस विषय को वह विगत कई वर्षों से अध्यापन द्वारा प्रस्तुत कर रहे हैंए वह विषय आखिर है क्या ?

1-2 eq[; ppkZ ds fcUnq &

1. गणित की परिभाषाऐं
2. गणित का क्षेत्र, महत्व, मूल्य
3. गणित का विकासक्रम
4. प्रमुख भारतीय गणितज्ञों का योगदान

1-3 ppkZ ls vis{kk,a &

इस मोड्यूल को प्रस्तुत करने का आधार है कि आप सभी प्रशिक्षण के दौरान शिक्षकों को इस बात से अवगत करा सकें कि –

1. वह अपने विषय से परिचित हो सकें।
2. वह अपने विषय के विकासक्रम को जान सकें।
3. वह अपने विषय में प्रमुख गणितज्ञों के योगदान का ज्ञान प्राप्त कर सकें।

1-4 f'k{k.k vf/kxe dh lkexzh &

प्रस्तुत अध्याय में निम्न शिक्षण सामग्री का उपयोग किया जा सकता है–

1.	चार्ट	2.	ट्रांसपेरेन्सिज	3.	स्लाइड्स
4.	वर्कशीट	5.	प्लेश कार्ड	6.	अन्य आवश्यकतानुसार

1-5 izLrqrhdj.k &

हम सभी अपने विषय को लम्बे समय से पढ़ा रहे हैं परन्तु हमने अपने छात्रों को कभी अवसर दिया है कि वह गणित से क्या समझता है बतायें ? आईये, आज हम यदि जानने का प्रयास करते हैं ?

1 xf.kr dh e[; ifjHkk"kk,¡ &

1. बर्थलाट (Berthlat) — ''गणित भौतिक अनुसंधान का एक आवश्यक उपकरण है।''
2. काम्टे (Comte) — ''वह विज्ञान शिक्षा जो गणित के साथ प्रारम्भ नहीं होती है, आवश्यक रुप से आधारभूत रुप में त्रुटिपूर्ण है।''
3. जॉर्ज केन्टर — ''गणित में समस्याऐं प्रस्तुत करने की कला उन्हें हल करने की कला से सरल है।''
4. बटैण्ड बरसेल (Bertrand Russell) — ''सत्य ही है कि गणित न केवल सत्य का प्रतिनिधित्व करता है बल्कि एक अलौकिक सौन्दर्य का भी'' एक ऐसा सौन्दर्य और निष्ठुरता, जैसे कि शिल्पकार प्रकृति के विरलतम रंगों, संगीत की सुर–लहरियों, भव्यतापूर्वक पवित्रता के लिए जो केवल एक महान दृश्य ही नहीं दिखाता बल्कि अपने आप में सर्वगुण सम्पन्न है।''
5. रोजर बैकन — ''गणित विज्ञानों का प्रवेशद्वार एवं कुंजी है। चूंकि जो व्यक्ति गणित से अनभिज्ञ है वह विज्ञानों और विश्व की वस्तुओं की जानकारी प्राप्त नहीं कर सकता।''

2 xf.kr esa D;k gS \ &

यहां सभी मिलकर यह प्रयास करें कि गणित में क्या धाराऐं हैं कौन–कौनसी शाखाओं में गणित बंटा है ? आईये, हम उन क्षेत्रों की पहचान करें–

xfrfof/k&

3 xf.kr dk {k= – गणित को मुख्यतः दो भागों में विभाजित किया जा सकता है।

1. आधारभूत गणित (Basic Mathematics)

2. प्रयुक्त गणित (Applied Mathematics)

1. आधारभूत गणित (Basic Mathematics)

1. समुच्चय सिद्धान्त (Set Theory)

2. बीज गणित (Algebra)

3. ज्यामिति (Geometry

4. विश्लेषण Analysis

5. संचय विन्यास एवं संख्या पद्धति Basic Mathematics

6. टोपोलोजी Topology (Combinations and Namber system)

2. प्रयुक्त गणित Applied Mathematics

1. परिकलनी विज्ञान Calculatory Science

2. सांख्यिकी Statistics

3. आंकिक विश्लेषण (Numerical Analysis)

4. स्वचालन सिद्धान्त Automation Theory

5. इस्ट समीकरण का गणीतिय सिद्धान्त Mathematical Theory of Optimization

6. सूचना सिद्धान्त Information Theory

4- xf.kr f'k{k.k &

इस प्रक्रियों में गणित के विकास को निम्नलिखित कालखण्डों में प्रस्तुत किया जा सकता है –

1. प्राचीन युग (Ancient Age)

2. मध्य युग (Middle Age)
3. आधुनिक काल (Modern Period)
   1. सत्रहवीं शताब्दी
   2. अट्ठारहवीं शताब्दी
   3. उन्नीसवीं और बीसवीं शताब्दियां

1- ikphu ;qx

इस युग में गणित के विकास का श्रेय प्रमुख रुप से मेसोपोटामिया मिस्त्र और यूनानी सभ्यताओं को है। प्राचीन और आधुनिक युगों में मध्यकाल की अपेक्षा गणित का अपेक्षाकृत अधिक विकास और विस्तार हुआ।

eslkiksVkfe;k

बेबीलॉनियन गणित की उत्कृष्टता (Superiority) उसकी संख्या पद्धति के स्थानीय मान–संकेत पर आधारित है। यह बड़ी से बड़ी संख्याओं एवं भिन्नों की अभिव्यक्ति के माध्यम हैं। संख्या पद्धति का विकास साभिप्रायिक (Intertional) अनुसंधान का परिणाम न होकर ईसा पूर्व तीन हजार वर्ष से शनैः शनैः उद्विकसित हुआ। इस काल के अतिविकसित भाग में मौद्रिक सौदों (Monetary Transections) के अभिलेखन हेतु संकेत विकसित हुआ। इसमें चांदी की बड़ी अभिलेखन हेतु (Justaposition) संकेत विकसित हुआ। इसमें चांदी की बड़ी और छोटी मात्रा की इकाइयों को दर्शाने के लिए संख्याओं को सान्निधि में रखा जाता था, जो कि मात्रा के इन मानों को प्रदर्शित करता था। यहाँ संख्या व्यवस्था सापेक्ष मूल्य निर्धारित करती थी।

इस प्रकार की संख्या व्यवस्था के प्रक्रम ने संख्या पद्धति को जन्म दिया। इस पद्धति को स्थानिक मान व्यवस्था (Sexagesimal Place Value Systemy) कहते हैं। बेबीलोनियन मुद्रा पद्धति में इसके मानक 1:60 थे, जैसा कि वर्तमान में डॉलर और सेन्ट 1:100 के अनुपात में है। डॉलर में 5.20 = 5 + 20/100 = 5 + 1/5 डॉलर या 5 x 100 + 20 = 520 सेन्ट हैं। इसी प्रकार बेबीलोनियन मुद्रा के मानों के लिए 2.30=2+30/60 = 2 + 1/2 या 2 x 60 + 30 = 150 है। बेबीलोनियन पद्धति में ये गुणन की सारणियां 60 x 60 तक बनीं। इस

प्रकार यहाँ अंकगणितीय योग, व्यवकलन गुणन, भाग, वर्ग, घन, मूलों आदि संक्रियाओं के विकास का मार्ग प्रशस्त हुआ। ग्रीक सिकन्दरिया, भारत, इस्लामिक दुनिया ने इन संक्रियाओं को अपने ज्योतिर्विज्ञान के अध्ययन में 5वीं शताब्दी तक इसी रूप में किया। इस पद्धति की प्रमुख उपलब्धियाँ इस प्रकार रहीं –

- संख्या पद्धति की पंक्तियों को शून्य जैसे प्रतीक से भरा गया।
- पाईथागोरियन संख्याओं के त्रिक के समान त्रिकों, यथा– 3, 4, 5 की पहचान हुई।
- ऐसी समस्याओं का विकास जिनमें दो संख्याओं को ज्ञात करना जबकि उनके योग और अन्तर ज्ञात हो।
- द्विघात समीकरीणों, यथा :– $x^2 - 6x + 8 = 0$ का विकास।
- सूझ पर आधारित आंकिक बीजगणित का उद्भव।
- अर्द्धवृत में स्थित त्रिभुज का एक कोण समकोण होता है।
- संख्याओं के वर्गमूल और घनमूल।
- π (पाई) का मान लगभग 3.140

feL=

मिस्त्र के इस काल के योगदान के साक्ष्य दो पेपिरी हैं। इनमें से एक रिण्ड अहमस, ई.पू. 1700 ब्रिटिश अजायबघर में तथा दूसरा गॉलेनिशेव पेपिरस मास्को में है। इनमें योग द्वारा गणितीय संक्रियायें की गयी हैं। इनमें पाई का मान 3:16 उपलब्ध है।

;ukuh ,o ;ukuoknh xf.kr

यूनान में अति प्राचीन गणित के विकास का साक्ष्य नहीं मिलता है। उसके गणितीय ज्ञान की क्षमता का आंकलन ईपू. 600 वर्ष में ज्ञात दर्शन के द्वारा किया जाता है। यह पाइथागोरस का समकालीन काल है। स्त्रोतों से पता चलता है कि 500 वर्ष पूर्व में मिस्त्र के खागोलीय और ब्रह्माण्डकीय सम्प्रत्यय बहुत संकीर्ण और आदिम प्रकृति

के थे। वास्तव में यूनानी स्वतन्त्र गणित का विकास ई.पूर्व 5वीं शताब्दी के उत्तरार्द्ध और चौथी शताब्दी के पूर्वार्द्ध में आरम्भ हुआ। हिप्पोक्रैटीज और किऑज सम्बन्धित कुछ गणितीय अवधारणाऐं इस प्रकार हैं – अन्तरिक्ष में वक्र, वृत्तीय चाप द्वारा परिबद्ध क्षेत्र। ई.पू.150 वर्षकालीन मिस्त्र के गणित पर बेबीलोनियन प्रभाव दृष्टिगोचर होता है, किन्तु इस काल में पूरब के प्रभाव के प्रमाण नहीं है। प्राच्य प्रभाव प्रथम और तृतीय ईस्वी में स्पष्ट दिखाई देता है। फिर भी बेबीलोन का प्रभाव ई.पू. 150 वर्ष से एवं हिप्पैर्कस के कार्यों में प्रतिबिम्बित होता है। प्राचीन यूनानी संस्कृति में गणित से सम्बन्धित प्रमुख तथ्य इस प्रकार हैं –

- प्लेटो के समय से गणित का स्त्रोत दर्शन में देखा जा सकता है। दर्शन से वैज्ञानिक गणित का उद्‌भव हुआ।
- जीनो एलिआ के अन्तराल–काल (Space and Time) अनन्त विभाजन सम्बन्धी विरोधाभासों एवं ई.पू. चौथी सदी में डिमॉर्किट्स की परमाण्विक संरचना ने गणितीय अभ्युपगमों (Postulates) के लिए मार्ग प्रशस्त किया।
- परिमेय संख्याओं की खोज इस काल में हुई।
- ज्यामिति के लिए स्वतन्त्र धरातल बना।
- क्षेत्रफल, आयतन, ज्यामितीय और अंकगणितीय, अनुपातों को परिभाषित किया गया तथा इनका गुणित श्रेणियों (Harmonics) से सम्बन्ध स्थापित किया गया।
- कोनिक और कोनिक सेक्शन के सिद्धान्तों का विकास एवं इनको पूर्णता प्राप्त हुई। आर्कमिडीज ने इनका उपयोग किया।
- आर्कमिडीज और एपॉल्लोनियस ने इस प्राचीनकाल के सैद्धान्तिक गणित को शिखर पर पहुँचाया।
- त्रिकोणमिति और गोलीय त्रिकोणमिति का विकास और प्रयुक्ति को प्रगति मिली।
- यूक्लिड के तत्वों का विकास और उपयोग हुआ।

2- e/; ;|x

ईसाइयत की अन्तिम विजय और इस्लाम धर्म के अभ्युदय तक इस कालखण्ड में प्राचीन गणित के अस्तित्व के विषय में बहुत कम जानकारी है। इस काल में ज्ञान का प्रमुख केन्द्र परशिया था। इसने भिन्न ईसाई, इस्लाम और भारतीय विज्ञान और गणित के लिए संगम की भूमिका निभायी। छठी शताब्दी में ससानियन शासन में दक्षिण–पश्चिम ईरान के कजिस्तान प्रान्त का गोण्डेशापुर ज्ञान का प्रमुख केन्द्र बना। अब्बासिद कैलिफ–अल–मंसूर के प्रभाव में बगदाद में वैज्ञानिक, गणितीय ज्योतिर्विज्ञान एवं आयुर्विज्ञान सम्बन्धी यूनानी भारतीय तथा अन्य प्रमुख सभ्यताओं के साहित्य का भाषा रूपान्तरण का महान कार्य किया गया। इस युग की उपलब्धियों में प्रमुख इस प्रकार हैं–

- बगदाद में प्रथम इस्लामिक ज्योतिर्विज्ञान स्कूल की स्थापना हुई।
- इस स्कूल का प्रतिनिधित्व करने वाले अल–ख्वारिज्मी को आज भी याद किया जाता है। इनकी मृत्यु लगभग सन् 850 ई. में हुई थी। इन्होने कलन विधि और बीज गणित का प्रतिपादन किया था। 'ऐल्जबरा' शब्द की व्युत्पत्ति उनकी एक पुस्तक 'किताब अल–जबर व अल–मुकाबला' से हुई।
- यूनानियों ने चार और उसकी जीवा से सम्बन्धित सारणियों का निर्माण किया। इस विधि की प्रतिस्थापना हिन्दू विधि द्वारा की गयी।
- मध्य युग में भारत का सबसे बड़ा योगदान त्रिकोणमिति के रूप में है। इकाई लम्बाई के किसी चाप की लम्बाई की माप उस चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण है। इसकी जीवा का आधा चाप द्वारा केन्द्र, पर बने कोण का ज्या (Sine) होता है।
- शून्य का बहुत कम उपयोग हुआ। यद्यपि इसका उल्लेख इस्लामी और बिजन्टाइनी गणित में यदा–कदा होता रहा।
- भारत में ज्योतिर्विज्ञान विकसित था। इसके सूत्रों, तथ्यों आदि की व्याख्या फ्रांसिसी गणितज्ञों क्लाडी गैस्पैर बैकेट, स्यूर डि मिजिरिएम ने सन् 1624 ई. में की।

- संख्याओं के हेल्लिनिस्टिक सिद्धान्त का विकास हुआ।
- यूक्लिड द्वारा रूढ़ संख्याओं की अनन्तता सिद्ध हुई।
- इस युग में इस्लामिक प्रभाव भी देखने को मिलता है। इस्लामिक गणना की युक्तियाँ अधिक पूर्णता लिये हुए हैं।
- ज्या (Sine) और स्पज्या (Cosine) फलनों की परिगणना सारणियाँ निर्मित की गयी।
- मुस्लिम गणितज्ञ आबू–उल–वफा का ज्या सिद्धान्त प्रतिपादित हुआ।
- सेक्साजेसिमल गणना पर कई लेख लिखे गये। अल–कैशी ने पाई के मान की गणना पर एक सूत्र लिखा। इसके अनुसार यह मान 4 से 16 दशमलव के स्थलों पर प्राप्त किया जाता है।

3- vk/kfud dky

सन् 1545 ई. में ईटली के गणितज्ञ जिरोलैमो कैर्डेनो की पुस्तक आर्टिस् मैग्नाई सिवे डि रेग्यूलिस प्रकाशित हुई। इसका अंग्रेजी अर्थ द ग्रेट आर्ट ओर, द रूल्स ऑफ एल्ज़ेबरा (महान कला या बीज गणित के नियम) है। इससे दो वर्ष पूर्व पॉलिश ज्योतिर्विज्ञान शास्त्री निकोलस कॉपर्निकस ने 'डि रिवोल्यूशनीबस ऑर्बियम कॉइलिस्टियम' की रचना की थी। इसका अर्थ है – आकाशीय पिण्डों के परिभ्रमण सम्बन्धी इसने टॉलमी की ब्राह्माण्ड सम्बन्धी अवधारणा को आघात पहुंचाया। इस काल में मध्ययुगीन शरीर विज्ञान सम्बन्धी सिद्धान्तों में सुधार हुए। इटली के गणितज्ञ जरॉलैमो कैर्डेनो की पुस्तक ''आर्टिस मैग्नाइ सिव डि रेग्यूलिज ऐल्जब्रैसिज प्रकाशित हुई। इस पुस्तक के शीर्षक का अर्थ है – ''महान कला या बीज गणित के नियम। इस पुस्तक ने गणित के विकास का नया मार्ग प्रशस्त किया। रैखिक और द्विघात समीकरणों के हल तो हजारों वर्षों से निकाले जाते रहे, किन्तु त्रिघात समीकरणों के हल की तकनीक अभी तक ज्ञात नहीं थी। इस काल में इटली के कई बीजगणितज्ञों ने स्वतन्त्र रूप से इन समीकरणों के हल निकाल दिये। इसमें शायद पहली सफलता सिपियॉन डिल फेरो को लगभग सन् 1510 ई. में मिली। किन्तु, इस सूत्र को निक्कोलो टैर्टेगिल्या के नाम से जाना जाता है, जिसने कि इस सूत्र की खोज स्वतन्त्र रूप से

दुबारा 'महान कला' के प्रकाशन के बाद लोडोव्हिको फरैरी के चतुर्थघाती समीकरणों के हक के साथ की थी।

इस अप्रत्याशित सफलता ने 'समीकरण सिद्धान्त' और 'महान कला–बीजगणित' को नये आयाम प्रदान किये। इसके साथ ही बीजगणित का प्रचार और प्रसार अन्य देशों में हुआ। ब्रुजेस के साईमन स्टेविन ने समीकरणों के मूल निर्धारित करने के लिए नियम बनाये। सन् 1585 में उसने दशमलव भिन्नों के व्यवस्थित उपयोग की स्थापना की। फ्रांस में हेनरी चतुर्थ के दरबार में फ्रैन्कोइज ह्वेट ने बीजगणित को नया नाम 'विश्लेषणात्मक कला' दिया। साथ ही इसको अधिक सामान्य स्वरूप प्रदान किया गया। अज्ञात राशियों को स्वरों और ज्ञात राशियों को व्यंजनों से प्रस्तुत करने की परम्परा भी यहाँ डाली गई। चर सम्बन्धी कई अवधारणाओं के लिए इसने मार्ग प्रशस्त किया। चर का अर्थ ऐसी सत्ता से है, जिसमें कई सम्भव मान हैं। परिमित से सम्बन्धित अवधारणाओं के विकास को भी यहां मार्ग मिला। पैरामीटर वह चर है जिसका किसी दिये गये संदर्भ में निश्चित मान हो। वास्तव में प्रतीकातत्मक बीजगणित का उद्भव यहां हुआ। इस व्यक्ति को इसलिए भी जाना जाता है कि उसने जॉहेन मूलर के साथ सन् 1579 ई. त्रिकोणमिति को एक स्वतन्त्र विषय के रूप में स्थापित करते हुए इसके प्रकाशन में योगदान किया। अन्यथा यह विषय ज्योतिर्विज्ञान का एक छोटा–सा ही भाग था।

* 17oh lnh &

'सदी के महानतम प्रतिभा' की देहली पर ह्वेट का सन् 1603 में निधन हुआ। इसके उपरान्त एक के बाद एक कई गणितीय खोजों का सिलसिला इस सदी में चला। इनमें प्रमुख इस प्रकार हैं –

- सन् 1614 के स्कॉटलैण्ड के जॉन नैपियर ने लघुगणक पर अपनी खोज 'गणक विज्ञान' का प्रकाशन किया।
- सन् 1615 में जोहनीज केप्लर ने इन्फाइनाइटसीमल का प्रतिपादन किया। इसके आधार पर सन् 1635 ई. में बॉनावेन्चुरा कैवेलिअरी ने अविभाजित ज्यामिति को निर्मित किया।

- सन् 1637 ई. में फ्रांसीसी दार्शनिक गणितज्ञ रिने डिकार्टिओ ने अपनी महान खोज 'डिसकोर्स–डि–ला–मेथॉड' के साथ ऐनालिस्टिक ज्योमिट्री का प्रकाशन किया। सन् 1640 ई. में गैलीलियो के एक शिष्य इवनजेलिस्टा टोरिसेलि ने लघुगणकीय कुण्डली की लम्बाई ज्ञात की।
- सन् 1654 ई. में डिकार्टी और फ्रांसीसी वैज्ञानिक ब्लैक पास्कल ने प्राथमिकता सिद्धान्त की नींव डाली।
- सन् 1658 में फर्मेन्ट ने सेमी क्यूबिक्ल पैराबोला की लम्बाई ज्ञात की।
- पास्कल और अंग्रेज गणितज्ञ जॉन वलिस्ट ने साइक्ल्वाइड का अध्ययन कर उनके गुणधर्म ज्ञात किये।
- 17वीं शताब्दी में सर आइजेक न्यूटन तथा लीबनिज ने गणित में मौलिक और अतुलनीय योगदान किये। न्यूटन द्वारा प्रतिपादित बाईनोमियल प्रमेय का महत्व सर्वविदित है। कन्वर्जेन्ट सीरीज की खोज का श्रेय भी न्यूटन को जाता है। साथ ही उन्होने कैलकुलस के क्षेत्र में भी योगदान किये। न्यूटन और जर्मन गणितज्ञों एवं दार्शनिकों ने इन्टीग्रेशन का प्रतिपादन किया तथा इसकी प्रयुक्ति के क्षेत्रों की पहचान की।
- लीबनिज ने dx, dy की अवधारणाओं का प्रतिपादन किया।
- कैलकुलस पर न्यूटन का प्रथम प्रकाशन फिलॉसफियल नेचुरलिव प्रिन्सिपिया मैथेमैटिका सन् 1687 ई. में हुआ। प्रिन्सिपिया लैटिन भाषा में है।
- सन् 1704 ई. में न्यूटन की ऑप्टिक्स क्वाड्रेचर ऑफ कर्वज प्रकाशित हुए।

* 18oh lnh &

गत शताब्दी में गणित की दो महान हस्तियाँ न्यूटन और लीबनिज थे, तो इस सदी में यह नेतृत्व यूलर ने सँभाला। यूलर अपने गुरु जे.बर्नौली के शिष्यों में सर्वाधिक प्रभावी था। यूलर के निबन्धों में इन्ट्रोडक्शियों इन एनालिसिन इंफानाटोरियम इन्ट्रोडक्शन टु इन्फाइनाटसिमल एनालिसिस आधुनिक गणित में अग्रणी कहा जाता है। यही वह कार्य है जिसने गणितीय त्रिक ज्यामिति, बीज गणित और विश्लेषण के तीसरी

सत्ता में फलन सम्प्रत्यय और अनन्त प्रक्रियाओं को सम्मिलित किया। इस सदी की प्रमुख उपलब्धियाँ इस प्रकार हैं –

- यूलर के अवकलन, समाकल और कलन पर निबन्ध इस युग की देन है। वे आधुनिक गणित के लिए विषय–वस्तु के स्त्रोत बने।
- यूलर ने कलन के अन्तर और अवकलन ज्यामिति के रूप में गणित की दो नवीन शाखाओं को अस्तित्व प्रदान किया।
- लैग्रान्जी ने बीजगणित, विश्लेषण, संख्या सिद्धान्त और यान्त्रिकी के क्षेत्रों में कार्य किया। इनकी प्रमुख कृतियाँ मैकनिक एनालिटिक और थियोरी डिस फॉन्क्शन्स एनालिटीक है। प्रथम कृति ने यान्त्रिकी को गणित की एक प्रमुख शाखा के रूप में स्थापित किया।
- सन् 1794 में फ्रांस में इकॉल पोलिटैक्निक स्थापित हुआ। इसमें युग के महान गणितज्ञ लैग्रान्जी, पिअटे, साईमन लाप्लास, गास्पार्ड मोंगे ने कार्य किये।
- लाप्लास ने आकाशीय यान्त्रिकी को गणित की शाखा के रूप में स्थापित किया। विभवी सिद्धान्त, लाप्लास ट्रान्सफोर्मेशन, लाप्लास समीकरण, आर्थोगोनल फंक्शन्स विश्लेषकों के लिए प्रमुख स्थान बने। उनके पाँच वॉल्यूम मैकेनिक सेलिस्टी शीर्षक से 1799–1825 ई. के मध्य प्रकाशित हुए।
- मोंगे की कृति ज्योमेट्री डिस्क्रिटिव सन् 1799 में प्रकाशित हुई। मूल रूप में यह सैनिक प्रयोजनों के लिए थी। मोंगे ने संश्लेषण के क्षेत्र में कार्य किया। उनकी प्रसिद्ध कृति ज्योमेट्री डि पोजिशन सन् 1803 में प्रकाशित हुई।

* 19oh@20oh lfn;k &

इस काल में नॉन–यूक्लिडियन ज्यामिति ग्रुप्स, फंक्शन्स और कॉम्पलैक्स वेरिएब्ल्स के सिद्धान्तों बीजगणितीय ज्यामिति, विश्लेषण, प्राथमिकता के क्षेत्रों में व्यापक खोज हुई। गणित की प्रयुक्ति क्षेत्र में भी आश्चर्यजनक प्रसार हुए। इसमें निम्नलिखित उल्लेखनीय हैं –

- फोरियर की क्लासिकी रचना सिद्धान्त, एनालिटीक डि ला शैलिअर–द अनालिटिकल थ्योरी ऑफ हीट में यह दर्शाया गया कि प्रत्येक यादृच्छिक फलन का ज्याओं और क्योज्याओं की फोरियर श्रेणियों में प्रसार किया जा सकता है।
- सन् 1826–1832 ई. में रूसी गणितज्ञ इवानोविच लॉयेशैवस्की और हंगरी के जैनस बोलाय ने दर्शाया कि यूक्लिड के स्वयं सिद्धियों के बिना भी ज्यामितीय प्रमेय सिद्ध किये जा सकते हैं। इससे नॉन–यूक्लिडियन ज्यामिति का उद्भव हुआ।
- सन् 1854 ई. में रीमैनियन ज्यामिति के द्वारा सामान्य सापेक्षता के लिए आधार निर्मित हुआ।
- सन् 1796 ई. में गौस ने संख्या सिद्धान्त, क्वाड्रैटिक रसीप्रोसिटी पर कार्य किये।
- गौस ने डिस्क्विजिशन्स जनरेल्व सिरका सुपरफिसीव क्र्वाज–'जनरल इन्क्वारिज कन्सर्निंग कवर्ड सर्फेसेज के प्रकाशन से डिफ्रन्शियल ज्यामिति में मौलिक योगदान किये।
- गॉस ने सांख्यिकी, ज्योतिर्विज्ञान, ज्योडिसी, चुम्बक पर मौलिक कार्य किये।
- कार्डेनो ने की अवधारणाओं का प्रतिपादन और विकास किया, यथा $-1 = i$।
- सन् 1799 में गॉस ने सिद्ध किया कि समीकरण $ax^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ का कम से कम एक मूल होता है।
- गैलोइज, फेलिक्स क्लीन ने ग्रुप सिद्धान्त का प्रतिपादन और विकास को अस्तित्व प्रदान किया। इससे सभी बीजगणितीय समीकरणों के समाधान सम्भव हुए।
- सन् 1872 में जर्मन गणितज्ञ फेलिक्स क्लीन और नार्वे के सोफस ली कार्य करते हुए ग्रुप सिद्धान्तों को ज्यामिति में उपयोग किया।
- 19वीं सदी में लैग्रान्जी और (Cauclry) ने थ्योरी ऑफ फंक्शन्स में थ्योरी ऑफ कॉम्पलैक्स वैरिएबिल को सम्मिलित किया।

- कॉम्पलैक्स वैरिएबिल पर सन् 1813–14 में स्विस जीन–रॉबर्ट अर्गेण्ड, ऐबल, कोशी, कार्ल वियर, रीमन्न ने खोजपूर्ण कार्य किये तथा इस क्षेत्र का विकास किया।
- सन् 1816 में कैम्ब्रिज ऐनलिटिकल सोसायटी की स्थापना की गयी। इसने लीबजियन मेथड़ ऑफ कैलकुलस को प्रोन्नत करने का बल दिया।
- 19वीं सदी के प्रथम अर्द्धक तथा गणित में कई प्रकार की पत्रिका, शोध–पत्रिकाओं के प्रकाशन पर जोर रहा। इंग्लैण्ड में ऑर्थर केली ने बीजगणितीय ज्यामिति पर वृहद कार्य किया। इन्होने मैट्रिसेज और ऐल्जब्रैक इन्वैरिएण्ट्स पर मौलिक कार्य किये।
- जर्मनी में अंकगणित के क्षेत्र में विइरस्ट्रास, रिचर्ड और डेडिकिण्ड, जार्ज कण्टॉर ने कार्य करते हुए अपरिमेय संख्याओं की अवधारणाओं को स्पष्ट किया।
- कण्टॉर के मौलिक कार्यों में बीट्रेज वर बिल्डिंग दर ट्रान्सफाईनटन में जिन्लेहर और कन्ट्रीब्यूशन टु द फाउण्डिंग ऑफ द थ्योरी ऑफ ट्रान्सफाईनाइट नम्बर्स प्रमुख हैं।
- विश्लेषणात्मक गणित के विकास के लिए भौतिकी से प्रेरणा मिली। हैमिल्टन और कार्ल गुस्टाव जैकोबी ने इस दिशा में पहल की। साथ ही सॉफसलॉइ के कार्यों ने भी आधुनिक टोपोलॉजी के विकास का मार्ग प्रशस्त किया। यहाँ विज्ञान और गणित में एकाग्रता की पहल हुई।
- ऐनालिसिस और मैथेमैटिक्स फिजिक्स में गहन अन्तर्क्रिया स्काटिस्ट जेम्स क्लार्क मैक्सवेल के ज्योतिर्विज्ञान और इलैक्ट्रो डायनामिक्स के गणितीय सिद्धान्तों से स्पष्ट होती है।
- मैक्सवैल, जर्मन ल्यूडविग बोल्टजमैन, जे. विल्लार्ड गिब्स ने एर्गोडिक थ्योरम्स के विकास का मार्ग प्रशस्त किया। इसको सामान्य स्वरूप जॉर्ज डेविड बिर्काफ ने दिया। यह वास्तव में स्टैटिस्टिकल मैकेनिक्स के क्षेत्र का विकास है।

- नोर्बर्ट वायनर ने सन् 1925 में ब्रउनियन मोशन पर कार्य करते हुए प्रायिकता सिद्धान्तों को विकसित किया तथा सांख्यिकी यान्त्रिकी को नये आयाम प्रदान किये। इस क्षेत्र में रूस के ए.एन. कॉल्मॉगॉरॉवा ने प्रायिकता के अभिगृहीतीय उपागम का प्रकाशन किया।
- सन् 1900 में गणित की द्वितीय अन्तर्राष्ट्रीय कांग्रेस में हिल्बर्ट में भी शताब्दी की गणित की समस्याओं पर सर्वाधिक महत्व दिया।
- कॉन्टीन्नम की समस्या तथा कुछ संख्याओं के ट्रान्सीडेन्स की समस्या का हल कार्ल ल्यूडिक सीवल, एलक्जेण्डर ऑसिपोविच तथा जेलफाण्ड और सीडर ने ज्ञात किया।
- मूल रूप में टोपोलॉजी ज्यामिति का अंग थी, किन्तु अब यह बीजगणित और विश्लेषण के निकट सम्बन्ध में आ गया है।
- जर्मन तर्कशास्त्री गणितज्ञ गॉटलॉग फ्रेग ने 1879 में संख्या की नवीन परिभाषा दी थी, किन्तु सन् 1913 में बर्टेण्ड रसेल और ह्वइटहेड ने प्रिन्सिपिया मैथेमैटिक्स का प्रकाशन किया। इस प्रकार 20वीं सदी के मध्य तक गणित का अभिगृहीतीय उपागम प्रमुखता में आ गया। आकारवाद और अन्तःप्रज्ञावाद इस अवधि में प्रभावी रहे।

5- Hkkjrh; xf.krKk dk ;kxnku

1. आर्यभट्ट प्रथम (467 ई.) – आर्यभट्ट ने प्रमुखतः निम्न सिद्धान्तों को प्रतिपादित किया।

    1. मूल क्रिया, घात क्रिया, क्षेत्रफल, आयतन, श्रेणी, बीजी, सर्वसमिकाऐं अन्तर्वर्ती समीकरणों की खोज की।
    2. पृथ्वी को गोल मानकर व्यास = 4967 योजन सर्वप्रथम ज्ञात किया।
    3. पाई π का मान ज्ञात किया।

2- vk;HkVV f}rh; &महाआर्यभट्टीय सिद्धान्त नामक पुस्तक की रचना करते हुए 625 आर्याओं को प्रस्तुत किया। इसमें पारीगणित, क्षेत्र व्यवहार, बीजगणित सम्मिलित है।

3 लल्लाचार्य शक (सम्वत् 421) – आपने गणिताध्याय एवं गोलाध्याय पर अध्ययन किया।

4 बराहमिहिर (505 ई.) – आपने गृहसंहिता, वृहज्जनातक, लघुजातक, विवाह पटल, योगयात्रा, वृहत्संहिता की रचनाऐं की।

5. महावीराचार्य (850) ई.– आपने गणितसार संग्रह प्रस्तुत किया जिसमें संज्ञाधिकार, परिकर्म व्यवहार, क्षेत्र।

6. ब्रह्मगुप्त (558 ई.) – ब्रह्मगुप्त ने प्रमुख रूप से घनमूल, वर्ग, घन, भिन्न अनुपात, त्रेराशिक, विषम संख्या राशिक, ब्याज, व्यूतक्रमण, शून्य, अनन्त, ठोस गोले के आयतन का सूत्र, शंकु के आयतन का सम्प्रत्यय दिया।

7. भास्कराचार्य (114 ई.) – भास्काराचार्य ने सिद्धान्त शिरोमणि, करण कौतुहल, समय सिद्धान्त शिरोमणि , गोल अध्याय रसगुण तथा सूर्य सिद्धान्त, लीलावती आदि की रचना की। आपने मुख्यतः पूर्णांक, भिन्न, त्रेराशिक, ब्याज, व्यापार, गणित, मिश्रण, श्रेणियों, मापिकी पर कार्य किया।

ppk d: vU; fcUn| &

प्रथम अध्याय पश्चात् यह अपेक्षा है कि आप समस्त प्रशिक्षार्थियों को अवसर देवे कि उन्होंने भी अन्य स्थानों पर यदि कोई सामग्री जिसका उल्लेख किया जा सकता है तो अवश्य करें।

1-6 eY;kdu gr| in ,o fØ;k,i &

1. सभी गणितीय परिभाषाओं को स्पष्ट करें
2. गणित विकासक्रम के मुख्य बिन्दुओं को स्पष्ट करें।
3. खेल विधि द्वारा मुख्य गणितज्ञों के योगदानों का उल्लेख करें।
4. गणितीय क्रमिक विकास पर विचार प्रस्तुत करें।

2- l[;k Kku

2-1 Hkfedk &

मानव जीवन में संख्याओं के ज्ञान का महत्व रहा है। जैसे–जैसे मानव ने उन्नति की, वैसे–वैसे गणित के विकास की आवश्यकता बढ़ती गई और इसके परिणामस्वरूप गणित में विकास और तेजी से हुआ। हम जीवन में संख्याओं का प्रयोग करते हैं और उनके बारे में अनेक बाते जानते हैं। संख्याऐं प्रत्येक्ष वस्तुओं को गिनने में हमारी सहायता करती है। संख्याओं का विभिन्न संदर्भों में और अनेक प्रकारों से प्रयोग किया जाता है। जीवन की विभिन्न स्थितियों के बारे में सोचिये जहां हम संख्याओं का प्रयोग करते हैं। आइए, हम संख्या ज्ञान के बारे में विस्तार से जानें।

2-2 ppk d e[; fcUn

- परिमेय, अपरिमेय एवं वास्तविक संख्याओं की समग्र समझ और इनकी विशेषताएँ।
- परिमेय, अपरिमेय एवं वास्तविक संख्याओं का संख्या रेखा पर प्रदर्शन। आवर्ती एवं अनावर्ती दशमलव संख्याओं की समझ।

2-3 ppk l vi{kk,

- विभिन्न प्रकार की संख्याओं का अवबोध करना।
- प्रत्येक प्रकार की संख्या हेतु विभिन्न गुणधर्मो यथा क्रम विनिमय, साहचर्य, बंटन, तत्समक अवयव, योज्य व गुणीय प्रतिलोम को स्पष्ट करना।
- परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं में अन्तर करना।

2-4 f'k{k.k vf/kxe lkexh &

- प्राकृत, पूर्ण, पूर्णांक, परिमेय, अपरिमेय एवं वास्तविक संख्याओं का चार्ट।
- परिमेय संख्याओं में योग व व्यक्कलन हेतु लकड़ी के आधार पर दो स्केल–एक स्थिर एवं दूसरा सरकने वाला
- संख्याओं में गुणधर्मों पर आधारित चार्ट (सारणी रूप में)

2-5 iLrqrhdj.k &

1. संभागीयों से प्राकृत संख्याओं के सम्बन्ध में चर्चा करते हुए निम्न बिन्दुओं को उभारें।
    1. प्राकृत संख्याऐं एवं इनका समुच्चय रूप।
    2. संख्या रेखा पर प्राकृत संख्याओं का निरुपण।
    3. संख्या रेखा पर प्राकृत संख्याओं का योग, व्यवकलन एवं गुणन।
    4. प्राकृत संख्याओं में विभिन्न गुणधर्म।
2. पूर्ण एवं पूर्णांक संख्याओं पर चर्चा करते हुए उपर्युक्त बिन्दुओं को उभारें।
3. दैनिक जीवन में कई बार ऐसी परिस्थितियां बनती हैं जिनमें किसी प्राकृत संख्या को समान भागों में बांटना पड़ता है। यथा–

- 1 रोटी को 2 समान भागों में विभाजित करने पर प्रत्येक भाग का मान 1/2 होता है।
- 2 को 3 समान भागों में बांटने पर प्रत्येक भाग का मान 2/3 होता है।
- इस प्रकार प्राकृत संख्याओं को समान भागों में बांटने पर प्रत्येक भाग का मान भिन्न रूप में प्राप्त होता है। यथा 1/2 , 2/3 आदि।

4. एक चर राशि वाले समीकण लेकर उनके हल के मान पर चर्चा करें। यथा –

$$2x + 3 = 0$$

एवं $$5x - 7 = 2$$

5 प्राकृत संख्याओं को समान भागों में बांटने एवं समीकरणों के हल से प्राप्त संख्याओं पर चर्चा करते हुए परिमेय संख्याओं की समझ प्रदर्शित करें।

6. परिमेय संख्याओं की समझ के आधार पर निम्नलिखित निष्कर्षों पर चर्चा करें।

- प्रत्येक प्राकृत संख्या एक परिमेय संख्या है।
- 0 (शून्य) एक परिमेय संख्या है।
- प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है।
- प्रत्येक भिन्न संख्या एक परिमेय संख्या है।
- यह आवश्यक नहीं है कि प्रत्येक परिमेय संख्या एक भिन्न संख्या है।

7. संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं का निरुपण करते हुए इस बात को उभारें कि किन्हीं दो दी हुई परिमेय संख्याओं के मध्य अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याऐं होती है।

8. किन्हीं दो दी हुई परिमेय संख्याओं के मध्य निश्चित संख्या में परिमेय संख्याऐं ज्ञात करवाऐं।

9. परिमेय संख्याओं में विभिन्न गुणवधर्मों पर चर्चा करें।

10. संख्याओं में विभिन्न गुणधर्मो के लिए क्रियात्मक कार्य करते हुए नीचे दी गई सारणी में पूर्ति करवाऐं।

संख्याऐं	संवृत्त हां/नहीं				क्रम विनिमय हां/नहीं				साहचर्य हां/नहीं			
	योग	व्यवकलन	गुणन	भाग	योग	व्यकलन	गुणक	भाग	योग	व्यवकलन	गुणन	भाग
प्राकृत		नहीं										
पूर्ण			हाँ									
पूर्णांक		हाँ		नहीं								
परिमेय	हाँ											

11- vifje; l[;k, &

- परिमेय संख्याओ को P/Q के रूप में व्यक्त करते हैं जहाँ P और Q पूर्णांक तथा $Q = 0$ हो।
- यदि 4 एवं 25/9 का वर्गमूल निकालना हो तो 4 = 2 एवं 25/9 = 5/3 प्राप्त होता है। यहां परिमेय संख्याऐं 4 एवं 25/9 का वर्गमूल 2 एवं 5/3 भी परिमेय संख्या ही है। परन्तु सभी परिमेय संख्याओं के वर्गमूल सदैव परिमेय संख्या ही नहीं होते हैं। यथा 2, 3, 5 आदि के वर्गमूल 2, 3, 5 का मान परिमेय संख्या नहीं होती है और इन्हें P \Q के रूप में भी व्यक्त नहीं कर सकते हैं।

ऐसी परिमेय संख्याऐं जिनके वर्गमूल का मान परिमेय संख्या नहीं हो, उन्हें अपरिमेय संख्या कहते हैं।

- अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याऐं होती है। इसी प्रकार अपरिमेय संख्याऐं भी अपरिमित रूप से अनेक होती है। यथा 2, 3, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, पाई, 0.10110111011110

12- l[;k js[kk ij vifjes; l[;k dk fu#i.k &

- क्रियात्मक कार्य करते हुए अपरिमेय संख्या 2, एवं 3 को संख्या रेखा पर निरुपित कराऐं।
- संख्या रेखा का प्रत्येक बिन्दु किसी परिमेय अथवा अपरिमेय संख्या द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। अर्थात प्रत्येक परिमेय एवं अपरिमेय संख्या के संगत संख्या रेखा पर एक बिन्दु होता है।

13 okLrfod l[;k &

- सभी परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं का संग्रह वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है।
- प्रत्येक वास्तविक संख्या को संख्या रेखा के एक अद्वितीय बिन्दु से निरुपित किया जाता है। साथ ही संख्या रेखा का प्रत्येक बिन्दू एक अद्वितीय वास्तविक संख्या को विकसित करता है। यही कारण है कि संख्या रेखा को वास्तविक संख्या रेखा कहा जाता है।

14 lkar] vlkar] vkofr ,o vukorh n'keyo l[;k,&

- क्रियात्मक कार्य एवं चर्चा द्वारा सांत, असांत, आवृत्ति और अनावर्ती दशमलव संख्याओं की समझ विकसित करवाऐं।

2-6 eY;kdu

1. पाई परिमेय संख्या है अथवा अपरिमेय और क्यों ?
2. क्या प्रत्येक परिमेय संख्या एक भिन्न संख्या होती है ?

2-7 leg dk; &

1. संख्याओं में गुणधर्मो पर आधारित सारणी (2.5 के बिन्दु संख्या 10 पर) में पूर्ति करवाएँ।
2. सांत व असांत, आवृति एवं अनावर्ती दशमलव संख्याओं की समझ विकसित करने हेतु क्रियात्मक कार्य करवाऐं।

3 lehdj.k

3-1 **Hkkfedk &** जब हमें एक अज्ञात राशि का मान ज्ञात करने की आवश्यकता होती है, तब हम ज्ञात तथा अज्ञात राशियों से युक्त ऐसे दो बीजीय व्यंज्जक प्राप्त कर लेते हैं। जो परस्पर बराबर होते हैं। इस प्रकार प्राप्त समता (Equality) के सम्बन्ध (समीकरण) में गणितीय क्रियाओं का प्रयोग कर अज्ञात राशि का मान ज्ञात कर लेते हैं।

3-2 ppkZ ds eq[; fcUnq &

1. एक चर राशि के समीकरण का हल तथा अनुप्रयोग।
2. द्विचर (युगपत्) समीकरण का हल तथा अनुप्रयोग।
3. द्विघात समीकरण का हल तथा अनुप्रयोग।
4. वैकल्पिक विधियों का प्रयोग।
5. प्राप्त हल से समीकरण का सत्यापन।

3-3 ppkZ ls vis{kk,sa &

1. विभिन्न समीकरणों को हल कर सकेगा।
2. वैज्ञानिक, व्यवसायिक, औद्योगिक, आर्थिक एवं दैनिक जीवन से सम्बन्धित अनेक जटिल समस्याओं को तर्क संगत हल कर सकेगा।

3-4 **f'k{k.k vf/kxe lkexzh &** श्याम पट्ट पर / कागज पर / चार्ट पर, ज्यामिति बॉक्स, ग्राफ पेपर, रंगीन चॉक आदि।

3-5 **iLrqrhdj.k &** चर्चा के मुख्य बिन्दुओं से सम्बन्धित समस्याओं को उदाहरणार्थ प्रस्तुत (उदाहरणार्थ) कर समीकरण बनाकर हल प्रस्तुत करवाए। जैसे –

1. एक प्लॉट का परिमाप 40 मीटर है। प्लॉट की लम्बाई, चौड़ाई से. 4 मीटर अधिक है, तो प्लॉट की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिये।

2. एक व्यक्ति की वर्तमान आयु उसके पुत्र की आयु की 6 गुणे से 5 वर्ष अधिक है। 7 वर्ष पश्चात् व्यक्ति की आयु पुत्र की आयु की 3 गुणे से 3 अधिक होगी। दोनो की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिये।

3. 16 को ऐसे दो भागों में विभाजित कीजिये कि बड़े भाग के वर्ग का दुगुना छोटे भाग के वर्ग से 164 अधिक हो।

द्विघात समीकरण हल कराते समय निम्नांकित बिन्दुओं की ओर ध्यान आकृष्ट करवाए –

1. मानक रुप – $ax^2 + bx + c = 0$ $(a + 0)$; a,b, c (अचर राशि)
2. विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$ (अचर राशि)
3. समीकरण के मूल क्रमशः – $x = \frac{-b + b^2 - 4ac}{2ac}$ एवं $x = \frac{-b \;\; b^2 - 4ac}{2a}$
   (श्री धराचार्य विधि)
4. मूलों की प्रकृति
5. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल क्रमश α व β हो तो उनका योग $\alpha + \beta = -b/a$ तथा गुणनफल $\alpha . \beta = C/Q_a$
6. दो मूल α तथा β दिये हो तो समीकरण $x^2 (\alpha + \beta)x + \alpha . \beta = 0$
7. मूलों द्वारा समीकरण का सत्यापन
8. समस्याओं के हल करने में अनुप्रयोग

3-6 eY;kdu &

1. एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल 63 वर्ग सेमी है यदि इसका आधार ऊँचाई से 5 अधिक है, तो त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिये।
2. निम्न समीकरण को हल कीजिए –
   1. $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-1} = 0$
   2. $2x - 9 = y - x + 7 = 5x - 6y$

3-7 lekgkj

निम्नलिखित बिन्दूओं को चर्चा के द्वारा उभारें –

1. समीकरण को हल करते समय की जाने वाली गणितीय संक्रियाऐं, प्रक्रियाऐं तथा सावधानियां जैसे पक्षान्तरण, ल.स. आदि।
2. युगपत, समीकरण को सरल रूप में लिखकर प्रतिस्थापन विधि, वज्रगुणन विधि तथा आलेख (ग्राफ) विधि द्वारा हल करना
3. द्विघात समीकरण को सरल रूप में लिखकर पूर्ण वर्ग बनाकर गुणनखण्ड विधि तथा श्रीधराचार्य (सूत्र) विधि द्वारा हल करवाऐं।
4. उपयुक्त विधि का चयन करना।

4- funs'kkad T;kfefr
(Co-ordinate Geometry)

4-1 Hkwfedk &

हम विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में हम किसी तल में बिन्दु की स्थिति एवं विभिन्न चतुर्थों में बिन्दुओं की स्थिति का अध्ययन क्रियात्मक विधि के माध्यम से करेंगे।

कई बार किसी तल में बिन्दु की स्थिति का अनुभव हम अपने दैनिक जीवन में करते हैं, लेकिन उसे हम एक बिन्दु की स्थिति के रुप में व्यक्त करना नहीं जानते। किसी तल में कोई किन्दु उसकी स्थिति को व्यक्त करता है विशेषकर अक्षों के सन्दर्भ में कई बार हम यह भी अनुभव करते हैं कि हम किसी विशेष स्थान पर होते हैं तो उसे ज्यामिति निर्देशांक के रुप में व्यक्त करने की जानकारी नहीं होती।

इस प्रकरण में कार्तिय निर्देशांक एवं दो बिन्दुओं के बीच की दूरी को भी क्रियात्मक विधि के माध्यम से विकसित किया जायेगा।

4-2 ppkZ ds eq[; fcUnq &

1. कार्तिय निर्देशांक पद्धति की आवश्यकता।
2. किसी तल पर एक बिन्दु के कार्तीय निर्देशांकों की स्थिति।
3. विभिन्न चतुर्थांशों में निर्देशांकों की स्थिति।
4. विभिन्न चतुर्थांशो में दो बिन्दुओं के बीच की दूरी।
5. रेखा खण्ड का विभाजन – अन्तः विभाजन
   – बाह्य विभाजन
6. त्रिभुज का क्षेत्रफल
7. चतुर्भुज का क्षेत्रफल
8. त्रिभुज का केन्द्रक, अन्तः केन्द्रक तथा बहिष्केन्द्र, परिकेन्द्र।

4-3 ppk l vi{kk,¡ &

इस अध्याय को पढ़कर यह जान पाऐंगे कि –

1. निर्देश तंत्र की अवधारण क्या है ? (गुण एवं कोटि सहित)
2. चतुर्थांशों के अनुसार निर्देशांकों को मयचिन्ह कैसे व्यक्त करते हैं।
3. दो बिंदुओं के बीच की दूरी कैसे ज्ञात की जाती है।
4. रेखाखण्ड के अन्तः एवं बाह्य विभाजन में अन्तर कैसे किया जाये।
5. त्रिभुज का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात किया जाता है।
6. त्रिभुज का केन्द्रक, परिकेन्द्र, अन्तः केन्द्र तथा बहिष्केन्द्र को कैसे व्यक्त किया जाये एवं उनमें क्या अन्तर है, यह जान सके।
7. चतुर्भुज का क्षेत्रफल त्रिभुज की सहायता से किस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है।

4-4 f'k{k.k vf/kxe lkexh &

1. आलेख को व्यक्त करता हुआ एक Hard Board।
2. संख्या रेखा को व्यक्त करती एक लकड़ी की पट्टी।
3. ग्राफ पेपर ।
4. एक वर्गाकार लकड़ी का मॉडल।
5. त्रिभुज, वृत एवं चतुर्भुज के मॉडल।

4-5 iLr|rhdj.k

1. कार्तीय निर्देशांक पद्धति को Hard Board की सहायता से दर्शाया जाएगा।

di;k fp= cuok ppk dj

एक बिन्दु के कार्तीय निर्देशांको Hard Board एवं विविध उदाहरण की सहायता से निर्देशित किया जाएगा।

(शिक्षक, विद्यार्थियों की सहायता से अक्ष–निर्माण एवं एक बिंदु की स्थिति को भुज एवं कोटि सहित दर्शायेगा–एक विद्यार्थी को निश्चित बिन्दु पर खड़ा करते हुए)

(इस प्रकार, अन्य क्रियाविधि की जाएगी)

2. निर्देशांकों के चिन्ह एवं चतुर्थांश – आलेख की सहायता से निर्देशित किया जाएगा।

(शिक्षक, ग्राफ पेपर की सहायता से अक्ष निर्माण करवाकर चतुर्थांशों को निर्देशांकों के चिन्ह सहित दर्शायेगा।

(इस प्रकार अक्ष निर्माण एवं विभिन्न चतुर्थांशों को चिन्ह सहित व्यक्त करने की क्रिया विधि की जाएगी)

fp= cuok,!

3. दो बिन्दुओं के बीच दूरी – मॉडल की सहायता से स्पष्ट किया जाएगा।

1. (त्रिभुज PTQ में पाईथोगोरस प्रमेय लगाने पर)

2. $PQ^2 = PT^2 + QT^2$

जहां $PT = x_2 - x_1$

तथा $QT = y_2 - y_1$

$PQ^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$

या

$PQ^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2$

अन्य उदाहरण – आशिामा, भारती और कैमिला

क्रमश : A(3, 1), B (6, 4) और C(8,6) पर बैठी है क्या आप सोचते हैं कि एक ही सीध (in a linm) में बैठी है ? सकारण उत्तर दीजिए ?

(इस प्रकार के अन्य उदाहरण सम्मिलित करें) चित्र बनवाऐं

4. विभाजन सूत्र को मॉडल /चार्ट की सहायता से दर्शाया जायेगा। (मॉडल की सहायता से क्रियात्मक विधि का उपयोग करते हुए) (चित्र बनवाऐं और चर्चा करें।

$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$

अतः $\dfrac{PA}{BP} = \dfrac{AQ}{PC} = \dfrac{PQ}{BC}$ (1)

5- f=Hkqt dk {k=Qy & लकड़ी के मॉडल/थर्माकोल के मॉडल की सहायता से स्पष्ट किया जायेगा। (चित्र बनवाऐं और चर्चा करें)

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x आधार x शीर्षलम्ब (ऊँचाई)

चित्र बनवाऐं और चर्चा करें।

समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x (समानान्तर भुजाओं का योग) (उनके बीच की दूरी)

ΔABC का क्षेत्रफल = समलम्ब ABQP का क्षेत्रफल + समलंब APRC का क्षेत्रफल – समलम्ब PWRC का क्षेत्रफल

ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}(BQ + AP)\,QP + \frac{1}{2}(AP + CR)\,PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)\,QR$

(मॉडल के आधार पर इस प्रकार की अन्य गतिविधियां की जाएगी)

6. चतुर्भुज का क्षेत्रफल – लकड़ी / थर्माकोल के मॉडल की सहायता से स्पष्ट किया जायेगा। (चित्र बनवाऐं और चर्चा करें)

चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल + त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

(मॉडल के आधार पर दोनो त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कर उसके योग के आधार पर क्षेत्रफल ज्ञात किया जाएगा।)

(इस प्रकार के अन्य उदाहरणों को क्रियात्मक विधि के माध्यम से हल किया जाएगा।)

7. त्रिभुज का केन्द्रक तथा अन्तःकेन्द्रक

मॉडल की सहायता से दर्शाया जाएगा। (चित्र बनवाऐं और चर्चा करें)

(किसी त्रिभुज की माध्यिकाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु त्रिभुज का केन्द्रक)

जहां G, त्रिभुज का केन्द्रक
(प्रत्येक माध्यिका को नपवाकर, बिन्दु G से सभी माध्यिकाऐं नपवाकर, त्रिभुज के केन्द्रक का ज्ञान दिया जाएगा।)

त्रिभुज का अन्तःकेन्द्रक – (चित्र बनवाऐं और चर्चा करें)

किसी त्रिभुज के शीर्ष कोणों के अन्तःमद्विभाजक रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु त्रिभुज का अन्तः केन्द्र कहलाता है।

समद्विभाजित रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु I से सभी समद्विभाजित रेखाओं की लम्बाई नपवाकर, अन्तः केन्द्रक का ज्ञान दिया जाएगा।

8. f=Hkqt dk cfg"dsUnz ¼ fp= cuok,¡ vkSj ppkZ djsa½ &

किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष कोण A का अन्तः समद्विभाजक तथा कोण B एवं कोण C के बाह्य समद्विभाजकों के मिलने का बिन्दु I, त्रिभुज ABC के शीर्ष कोण A के सामने का बहिष्केन्द्र कहलाता है।

(इसे भी त्रिभुज के मॉडल चार्ट की सहायता से स्पष्ट किया जायेगा।)

(इस प्रकार मॉडल निर्मित करवाकर उनसे त्रिभुज का केन्द्रक, अन्तः केन्द्र तथा बहिष्केन्द्र कैसे ज्ञात करते हैं, उनका अभ्यास कराया जाएगा)

8- f=Hkqt dk ifjdsUnz **(Circum Centre)** (चित्र बनवाऐं और चर्चा करें)

1. सर्वप्रथम थर्माकोल की सहायता से त्रिभुज का मॉडल निर्माण किया जाएगा।
2. त्रिभुज मॉडल के पश्चात् उस मॉडल के शीर्षों को मिलाते हुए एक वृत की आकृति का निर्माण कीजिए।
3. त्रिभुज एवं वृत्त के संयुक्त मॉडल की सहायता से वृत्त का केन्द्र ज्ञात कीजिए।
4. वृत्त के केन्द्र को त्रिभुज के शीर्षों से मिलाकर उनकी दूरी (परित्रिज्या) ज्ञात कीजिए।

   आप पाऐंगे कि –

   $$PA = PB = PC$$

5. इस आधार पर यह कहा जा सकता है कि ''किसी त्रिभुज के तीनों शीर्षों से होकर जाने वाला वृत्त त्रिभुज का परिवृत्त कहलाता है तथा उसका केन्द्र त्रिभुज का परिकेन्द्र कहलाता है।

   (इस प्रकार अन्य मॉडल बनवाकर त्रिभुज की परिकेन्द्र का अभ्यास कराया जाएगा)

4-6 lkewfgd dk;Z **(Group Work)**

विद्यार्थियों एवं शिक्षकों को इस प्रकरण से सम्बन्धित सामूहिक कार्य के रुप में क्रियात्मक विधि, मॉडल निर्माण करवाकर विविध संप्रत्ययों को विभिन्न उदाहरणों एवं Activity के माध्यम से अभ्यास कराया जाएगा।

5- ikf;drk

5-1 Hkkfedk &

हमारे जीवन मं कई ऐसी घटनाऐं होती हैं जिनका एक निश्चित हल नहीं होता।

जैसे – 1. मैच में टॉस जीतने का संयोग।

2. वार्षिक परीक्षा में प्रथम स्थान प्राप्त करने की संभावना
3. वर्षा में ओले गिरने की संभावना।
4. अंतरिक्ष में भेजे जाने वाले या को पहुंचाने की संभावना।
5. खेल के पासे में 6 अंक आने की संभावना।

इस प्रकार के कथन में एक अनिश्चिता होती है। और उनका सही अनुमान लगाना भी कठिन होता है।

अतः परिस्थितियों के आधार पर परिणामेां की संभावना का पता करने के सिद्धान्त को प्रायिकता या Probability कहते हैं।

सिक्का उछाल कर या पास फैंक कर इनके परिणामों को देखा जा सकता है। प्रयोग विशेष करके इसको मापा जा सकता है। इसे प्रायोगिक दृष्टिकोण कहा जाता है। तथा इसे ''आनुभाविक प्रायिकता भी कहते हैं''।

प्रायिकता की आनुभाविक व्याख्या का बड़ी संख्या में दोहराए जा सकने वाले किसी भी प्रयोग से जुड़े प्रत्येक घटना के लिए अनुप्रयोग किया जा सकता है। किसी प्रयोग को दोहराने की भी एक सीमा होती है क्योंकि अनेक परिस्थितियों में यह अधिक व्यय वाला हो या संभव ही नहीं हो। जैसे एक उपग्रह छोड़ने के प्रयोग को परिकलित करने के लिए बार–बार दोहराने की छोड़ते समय उसके असफलता की आनुभाविक प्राथमिकता ज्ञात करने हेतु प्रयोग को दोहराया जाना असंभव है या एक सिक्के को मिलियन बार उछालकर चित्त आने की प्रमिकता ज्ञात करनी हो तो प्रयोग द्वारा संभव नहीं होगा।

ऐसी परिस्थिति में प्रयोग को ''सैद्धान्तिक– प्रायिकता '' के आधार पर परिभाषित की जाती है।

5-2 ppk dk e[; fcUn &

1. एक घटना E की आनुभाविक प्रामिकता P (E) है।

$$P(E) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें घटना घटित हुई}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

2. किसी घटना के घटने की प्रायिकता 0 और 1 के बीच होती है।
3. असंभव घटना की प्रायिकता 0 होती है।
4. एक घटना E की सैद्धान्तिक प्रायिकता P (E) है।

$$P(E) = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोगों के सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

5. किसी घटना E के लिए

   $P(E) + P(E) = 1$ होता है।

   जहां E (घटना) और E (नहीं घटना) को व्यक्त करता है।

5-3 ppk l vi{kk, &

2. दैनिक जीवन में संभावनाओं का अनुमान लगाकर उनके परिणामों के लिये तैयार हो सकेंगे।
3. जटिल संभावनाओं का पूर्वानुभान कर सकेंगे।
4. गणनाओं को सरल रूप दे सकेंगे।
5. कल्पनातीत आंकड़ों का सारणीयन कर सकेगे।
6. आज के परिपेक्ष में भौतिक विज्ञान, वाणिज्य, जैविक विज्ञान, आयुर्विज्ञान, मौसम का पूर्वानुभाव आदि क्षेत्र में इसका उपयोग कर सकेगे।

5-4 f'k{k.k vf/kxe lkexh & सिक्के, पासा, कांच की गोलियां, चार्ट, मॉडल

5-5 iLrrhdj.k

''प्रायिकता'' की संकलपना का विकास 1654 में एक जुआरी शैवेलियर डि मरे) के द्वारा उठायी गयी समस्याओं से हुआ और संत्रहवीं शताब्दी के एक सुप्रसिद्ध फ्रांसीसी वैज्ञानिक पियरे पास्कल व दि फर्मा के साथ चर्चा कर प्रायिकता का सिद्धान्त दिया और इस सिद्धान्त पर प्रथम पुस्तक Book on Games of Chance" 1963 में प्रकाशित हुई जिसे इतालवी भौतिकशास्त्री एवं गणितज्ञ जे.कार्डन ने लिखी।

सन् 1795 में पियरे–साईमन लाटलास प्रायिकता को समझने के लिये कुछ प्रयोग करेंगे प्रयोग एक सिक्का लेगें और उसे दस बार उछालेंगे और देखेंगे कितनी बार चित आता है और कितनी बार पट आता है तथा अपने प्रेक्षणों निम्न को सारणी एक में अंकित करेंगे।

सिक्का उछालने की संख्या	चित्त आने की संख्या	पट आने की संख्या
10		

सारणी नं.1

नीचे दी गई भिन्नों का मान ज्ञात करेंगे।

अ– $\dfrac{\text{चित्त आने की संख्या}}{\text{सिक्का उछालने की कुल संख्या}}$

ब– $\dfrac{\text{पट आने की संख्या}}{\text{सिक्का उछालने की कुल संख्या}}$

i;kx&2 सिक्के को 20 बार उछालकर प्रथम प्रयोग की भांति अपने प्रेक्षण को सारणी में लिखावें तथा भिन्न की गणना करना।

i;kx&3 सिक्कों को 20 से अधिक बार उछालकर उक्त प्रयोग को प्रयोग–1 की तरह दोहराना।

ifj.kke – हम देखेंगे कि जैसे–जैसे सिक्का उछालने की संख्या बढ़ाते जायेंगे। वैसे वैसे प्रयोग–1 में वर्णित भिन्नों का मान 0.5 के निकट होता चला जायेगा।

i:;kx & प्रयोगको आसानी से करने के लिये प्रत्येक विद्यार्थी से सिक्का उछलवा कर उनके परिणामों को श्यामपट्ट पर लिखा जा सकता है।

चित्त और पट आने की संभावना को यदि जोड़ा जाये तो मान लगभग 0.5 + 0.5 =1

i:;kx&4 एक पासे को 20 बार फेंक कर उस पर अंकित 1, 2, 3, 4, 5, 6 कितनी बार प्राप्त होता है उसका अंकन नीचे लिखी सारणी मं किया जाता है।

पासा फैंकने की संख्या	ikl: ij fuEu vdk d: vku: dh l:[;k						
	1	2	3	4	5	6	
20							

निम्नलिखित भिन्नों का मान ज्ञात करेंगे।

A $\frac{\text{पासे पर 1 आने की संख्या}}{\text{पासा फैंकने की कुल संख्या}}$

B $\frac{\text{पासे पर 2 आने की संख्या}}{\text{पासा फैंकने की कुल संख्या}}$

A $\frac{\text{पासे पर 6 आने की संख्या}}{\text{पासा फैंकने की कुल संख्या}}$

इस प्रकार पासे को 40 बार फेंक कर इस प्रयोग को दाहरायेगें।

हम देखेंगे कि जैसे–जैसे प्रयोग की संख्या में वृद्धि करेंगे वैसे ही प्रत्येक भिन्न का मान 1/6 के निकट आता जायेगा।

इस प्रयोग को भी सभी छात्रों को चार गुणा में बांट कर दस–दस बार पासा फिकवा के प्रेक्षकों को लिखा जा सकता है।

प्रयोग –5 दो सिक्कों को एक साथ दस बार उछाल कर अपने प्रेक्षणों को निम्न सारणी में भरें

सिक्का उछालने की संख्या	पट आने की संख्या	एक पट आने की संख्या	दोनो पट आने की संख्या
10			

A $\dfrac{\text{पट न आने की संख्या}}{\text{दो सिक्कों को उछालने की कुल संख्या}} \simeq 0.25$

B $\dfrac{\text{एक पट आने की संख्या}}{\text{दो सिक्कों को उछालने की कुल संख्या}} \simeq 0.50$

C $\dfrac{\text{दो पट आने की संख्या}}{\text{दो सिक्कों को उछालने की कुल संख्या}} \simeq 0.25$

हम देखते हैं कि मान लगभग 0.25, 0.50 तथा 0.25 प्राप्त होते हैं।

ifj.kke& इस प्रकार सिक्के को उछालना अथवा पासे को फैंकना अभिप्रयोग कहलाता है तथा इनके एक अथवा अधिक परिणाम प्राप्त होते हैं। भिन्नें जो प्राप्त की गई है उन्हें प्रायिकता कहते हैं।

अतः घटना E के घटने की अनुभाविक प्रायिकता को निम्नानुसार परिभाषित कर सकते हैं।

$$P(E) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें घटना घटी}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

ifj.kke & प्रयोगों में आने वाले सभी परिणामों की प्रायिकता को यदि जोड़ा जावे तो घटना का मान 0 से 1 के बीच प्राप्त होता है।

i;kx 6& एक पासे को उछालकर यदि 7 अंक आने की प्रायिकता देखी जावे तो वह शून्य होगी।

ifj.kke & असंभव घटना की प्रायिकता शून्य होती है।

कभी–कभी प्रयोगों को दोहराना संभव नहीं होता है ऐसे में हम प्रयोगों को कल्पना से सीधे ही समप्रायिक होने की कल्पना करके प्रायिकता ज्ञात करते हैं उसे सैद्धान्तिक प्रायिकता कहते हैं। या प्रायिकता कहते हैं।

$$P(E) = \frac{E \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के सभी संभव परिणामों की कुल संख्या}}$$

i;kx 7 & एक पासे को एक बार फैंकते हैं –

1 4 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या होगी ?

2 4 से छोटी और उसके बराबर संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या होगी ?

gy & माना कि 4 से बड़ी संख्या प्राप्त करना घटना E है और इसमें 5, 6 आना परिणाम है। अतः परिणाम दो हुए और कुल परिणाम 6 होंगे।

अतः $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

4 तथा 4 से छोटी संख्याऐं निम्न प्रकार से प्राप्त हो सकती हैं 1, 2, 3, 4 और यदि घटना को F से प्रदर्शित करें। तो कुल 6 परिणामों में से 4 परिणाम प्राप्त होंगे। तो –

$P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

अतः $P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$

इसी प्रकार इसका विलोम E' भी ज्ञात किया जा सकता है अर्थात

$P(E') = 1 - P(E)$

परिणाम $P(E) + P(E') = 1$

इस प्रकार की घटनाओं को पूरक घटनाऐं कहते हैं।

प्रयोग–8 किसी स्कूल में कक्षा दसवीं में 40 विद्यार्थी हैं जिनमें से 25 लड़कियां 15 लड़के हैं कक्षा अध्यापिका को एक विद्यार्थी कक्षा प्रतिनिधि के रूप में चुनना है प्रत्येक विद्यार्थी का नाम एक कार्ड पर

लिखकर थैले में डालकर अच्छी तरह हिला देते हैं व एक कार्ड थैले में चुना जाता है कार्ड पर लिखा नाम लड़के अथवा लड़की का है ?

हल – कुल विद्यार्थी 40 हैं इनमें से एक कार्ड चुनना है सभी संभव परिणामों की संख्या–40 कार्ड पर लड़की के नाम होने के अनुकूल परिणामों की संख्या 25

$$P(G) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

कार्ड पर लड़के नाम होने की अनुकूल परिणाम कुल 15

$$P(B) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

हम P(B) को इस प्रकार भी प्राप्त कर सकते हैं

$$P(B) = 1 - P(G) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

5-6 eY;kdu

मूल्यांकन हेतु कुछ समस्याऐं देकर मूल्यांकन किया जा सकता है।

5-7 Ieg dk;l

6- prHkqZt

6-1 Hkwfedk

हम अपने आस–पास और परिवेश में चतुर्भुज के आकार की अनेक वस्तुएँ देखते हैं, जैसे कमरे का फर्श, दीवार, खिड़कियाँ, छत, श्यामपट्ट, पुस्तक का पृष्ठ, टेबल का ऊपरी पृष्ठ, सन्दूक का प्रत्येक पृष्ठ (फलक), खेत, खेल के मैदान आदि। यद्यपि हमारे आस–पास दिखने वाली अधिकांश वस्तुएँ आपस के आकार की होती है, फिर भी हम चतुर्भुजों के बारे में और अधिक जानकारी प्राप्त करेंगे।

6-2 ppkZ ds eq[; fcUnq

1. आयत, वर्ग, समान्तर चतुर्भुज, समलम्ब चतुर्भुज के गुणधर्म एवं विशेषताऐं।
2. चतुर्भुजों से सम्बन्धित प्रमेयों का सैद्धान्ति रुप से सत्यापन।
3. चतुर्भुज सम्बन्धित प्रमेयों पर आधारित ज्यामितीय समस्याओं का समाधान।

6-3 ppkZ ls vis{kk,¡

1. चतुर्भुजों से संबंधित प्रमेयों का सत्यापन सैद्धान्तिक रुप से कर सकेंगे।
2. दैनिक जीवन की समस्याओं के समाधान चतुर्भुजों से सम्बन्धित प्रमेयों का अनुप्रयोग कर सकेंगे।

6-4 f'k{k.k vf/kxe lkexzh &

1. कार्ड शीट, थर्मोकाल शीट, गत्ता शीट,
2. स्केच पेन, पेन्सिल, रबड़, धागे, कील, ज्यामितीय बॉक्स

6-5 iLrqrhdj.k

1. विभिन्न्न प्रकार के चतुर्भुजों के मॉडल की सहायता से इन पर चर्चा करते हुए निम्नलिखित बिन्दुओं को उभारें।

- चतुर्भुज की अवधारणा

- समान्तर चतुर्भुज की विशेषताऐं एवं गुणधर्म
- आयत की विशेषताऐं एवं गुणधर्म
- वर्ग की विशेषताऐं एवं गुणधर्म
- समचतुर्भुज की विशेषताऐं एवं गुणधर्म
- समलम्ब चतुर्भुज की विशेषताऐं एवं गुणधर्म

2. चतुर्भुजों से सम्बन्धित निम्नलिखित प्रमेयों का प्रयोग द्वारा एवं चर्चा करते हुए इनका सैद्धान्तिक रुप से सत्यापन करवाऐं।

- समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाऐं बराबर होती है एवं इसका विलोम।
- समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर एक–दूसरे को समद्विभाजित करते हैं एवं इसका विलोम।
- एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है, यदि उसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म परस्पर बराबर एवं समान्तर हो।
- समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण इसे दो सर्वागसम त्रिभुजों में बांटता है।
- यदि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण समान हो तो वह एक आयत होता है।
- आयात के विकर्ण परस्पर बराबर होते हैं।
- यदि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्बवत हो तो वह एक सम–चतुर्भुज होता है।
- यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर बराबर एवं लम्बवत हो तो वह एक वर्ग होता है।
- त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा को समान्तर एवं उसका आधा होता है।
- त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से एक अन्य भुजा के समान्तर खींची गई रेखा तीसरी भुजा के समद्विभाजित करती है।

- एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच स्थित समान्तर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।
- बौधायन प्रमेय (पाइथोगोरस प्रमेय) एवं इसका विलोम।

3. उपर्युक्त प्रमेयों का उपयोग करते हुए इन पर आधारित ज्यामितीय समस्याओं पर चर्चा करते हुए हल करवाएें। यथा –

   - प्रयोग द्वारा एवं सैद्धान्तिक रुप से सिद्ध कीजिए कि समान्तर चतुर्भुज के समद्विभाजक एक आयात बनाते हैं।
   - ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है तथा AP और AP और CQ और CQ शीर्ष A एवं C से विकर्ण BD पर क्रमशः लम्ब हैं तो सिद्ध कीजिए कि–

     i. $\Delta APB \quad \Delta CQD$

     ii. $AP = CQ$

6-6 eY;kdu

1. क्या एक वर्ग, एक आयत व एक चतुर्भुज भी है ?
2. क्या समान्तर चतुर्भुज समलम्ब चतुर्भुज भी है ?
3. पतंग एक समान्तर चतुर्भुज नहीं है। क्यों ?
4. एक आयत अथवा एक समचतुर्भुज, एक वर्ग नहीं है। क्यों ?

6-7 leg dk;Z

1. विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों के गुणधर्मों एवं विशेषताओं पर आधारित चार्ट बनवाएें।
2. थर्माकोल शीट का प्रयोग करते हुए बाोधापन प्रमेय (पाईथोगोरस प्रमेय) के सत्यापन हेतु मॉडल बनवाएें।

7 oÙr] pki vkSj mlds }kjk vUrfjd dks.k] oÙr dh Li'kZ js[kk,sa ,oa lEcfU/kr jpuk,sa &

7-1 iLrkouk & एक घास मै मौदान में एक खूंटे से बंधा घोड़ा अधिक से अधिक कितने क्षेत्र में (घास चरने हेतु) विचरण कर सकता है? इस उदाहरण से केन्द्र, त्रिज्या, परिधि और क्षेत्रफल सहित वृत्त तथा उसके अवयवों को आसानी से समझ सकते हैं।

इसके आगे वृत्त के चाप द्वारा केन्द्र तथा शेष परिधि पर अन्तरित कोणों एवं चक्रीय चतुर्भुजों से सम्बन्धित विभिन्न प्रमेयों का सत्यापन करेंगे।

7-2 ppkZ ds eq[; fcUnq oÙr vkSj mlds Hkkx] lEcfU/kr lenjLFk thok,a] lokZxle pkS

- चाप और उसके द्वारा अन्तरित कोण पर आधारित प्रमेयों का सत्यापन
- जीवा द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण पर आधारित प्रमेय का सत्यापन
- चक्रीय चतुर्भुज पर आधारित प्रमेयों का सत्यापन
- वृत्त एवं स्पर्श रेखाओं पर आधारित प्रमेयों का सत्यापन
- वृत्त का स्पर्श रेखाओं की रचना करना।
- वृत्त के अन्तर्गत एवं परिगत त्रिभुज की रचना।

7-3 ppkZ ls vis{kk,a & 1. वृत्त पर आधारित विभिन्न प्रमेयों का सैद्धान्तिक एवं गतिविधि आधारित (आगमन–विधि से) सत्यापन कर सकेंगे।

2. वृत्त से संबंधित विभिन्न रचनाओं को कुशलतापूर्वक (चरणबद्ध ढंग से) कर सकेंगे।

7-4 f'k{k.k&vf/kxe lkexzh& ज्यामितीय बॉक्स (बड़ा एवं छोटा); कागज (शीट) के कटे हुए वृत्त, ट्रेसिंग पेपर, कैंची, धागा, वृत्तीय तथा सत्यापन यंत्र, रंगीन कागज आदि रंगीन चॉक, मार्कर पेन, स्केल (बड़ी) आदि

7-5 iLrqrhdj.k &

शिक्षक कार्ड शीट / श्यामपट या कागज पर विभिन्न त्रिज्याओं के वृत्त बनाकर अभीष्ट रचना करके गतिविधि द्वारा (मापन से आगमन सिद्धान्त से) या प्रायोगिक विधि से प्रमेय या उपप्रमेय का सत्यापन सहभागिता के आधार पर करेगा। इसके पश्चात् पाठ्य पुस्तकानुसार सैद्धान्तिक सत्यापन (उपपति सहित) विश्लेषण–संश्लेषण विधि से सबकी सहभागिता से (क्रमबद्ध–चरणबद्ध ढंग से) करेगा। ¼ fp= cuok,¡ vkSj ppkZ djsa½

चर्चा के द्वारा प्रमेय में प्रयुक्त शब्दावलियों का अर्थ उदाहरण एवं चित्र सहित स्पष्ट –

जैसे – चापखण्ड, वृत्त खण्ड, त्रिज्या खण्ड, केन्द्र पर अन्तरित कोण, शेष परिधि (दिये गये चाप को छोड़कर) पर अन्तरित कोण, सम्मुख या अभिमुख कोण, अन्तराभिमुख कोण, जीवा–व्यास, चक्रीय चतुर्भुज, छेदक रेखा–स्पर्श रेखा, एकान्तर वृत्त खंड आदि। ¼ fp= cuok,¡ vkSj ppkZ djsa½

उपर्युक्त अवबोध के पश्चात् एक–एक करके निम्नांकित प्रमेयों का प्रायोगिक एवं सैद्धांतिक सत्यापन करेंगे (पाठ्यक्रमानुसार)। ¼ fp= cuok,¡ vkSj ppkZ djsa½

tSls &

1. एक वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर स्थित होती है।
2. एक चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण, वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।
3. चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं। आदि

¼ fp= cuok,¡ vkSj ppkZ djsa½

4. यदि वृत्त की स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु से एक जीवा खींची जाये तो इस जीवा द्वारा दी हुई स्पर्श रेखा के साथ बनाये गये कोण, क्रमशः जीवा द्वारा एकान्तर वृत्त खण्डों में बनाए गए कोणों के बराबर होते हैं।

5. दो वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श–रेखाऐं
   अ– अन्तःस्पर्शी
   ब– बाह्य स्पर्शी
   स– जब वृत्त अप्रतिच्छेदी हो।

¼ fp= cuok,¡ vkj ppk dj½

रचनाएँ (ज्यामितीय बॉक्स से कार्ड शीट/श्यामपट पर)– प्रायोगिक कार्य करवाऐं

1 वृत्त पर स्थित बिन्दु पर स्पर्श रेखा की रचना।

2 बाह्य बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखा की रचना।

3 वृत्त के दिये गये कोण के वृत्त खंड की रचना।

4 त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त की रचना (किन्हीं दो अन्तः कोणों के समद्विभाजकों का संगठन बिन्दु अन्तःकेन्द्र)।

5 त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना (किन्हीं दो भुजाओं के समद्विभाजकों का संगमन बिन्दु–परिकेन्द्र)।

6 त्रिभुजों की रचना।

7 समरूप बहुभुजों (त्रिभुज एवं चतुर्भुजों) की रचना

वृत्त के दिये गये कोण के वृत्त खण्ड की रचना एवं अनुप्रयोग

¼ fp= cuok,¡ vkj ppk dj½

7-6 eY;kadu &

1. अर्द्धवृत्त में बनने वाला कोण .... होता है।
2. जब वृत्त बाह्य स्पर्शी हो तो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या .... होती है।
3. वृत्त के एक ही वृत्त खण्ड में स्थित कोण .... होते हैं।
4. चक्रीय समान्तर चतुर्भुज .... होता है।
5. किसी वृत्त की समान जीवाऐं केन्द्र से .... होती है।
6. एक वृत्त के चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण, शेष परिधि के कोण से .... होता है।

7-7 fu"d"kZ &

पाठ्यक्रमानुसार किसी भी प्रमेय का प्रायोगिक सत्यापन करके सैद्धान्तिक उप्रत्ति को समझ सकते हैं। किसी भी निर्मेय (रचना) को चरणबद्ध–क्रमबद्ध ढंग से अनुसरण द्वारा निर्मित कर सकते हैं।

8- i"Bh; {k=Qy o vk;ru lUVj e yuk

8-1 Hkfedk

लम्बाई व चौड़ाई का ज्ञान करवाने के लिए सामान्यतः द्विमीय आकृतियों को श्यामपट्ट पर आसानी से बनाया जाता है। इन आकृतियों जैसे त्रिभुज, आयत, समलम्ब चतुर्भुज तथा किसी भी बहुभुजाकर क्षेत्र को समझाने के लिए प्रभावशाली विधियों के प्रयोग किया जाता है, ताकि इनका अनुप्रयोग संबंधित जगह पर किया जा सके। गणित में इन द्विविमीय आकृतियों के अलावा माध्यमिक स्तर के बालक–बालिकाओं को ऊँचाई को ध्यान में रखते हुए त्रिमित्रीय आकृतियों जैसे – धन, घनाभ, बेलन, शंकु, गोला इत्यादि के क्षेत्रफल व आयतन को ज्ञात करने की विधियों की जानकारी होना आवश्यक है। जिससे इन आकृतियों के बारे में विभिन्न क्रियाविधियों के द्वारा शिक्षार्थियों में अन्वेषणात्मक शक्ति का विकास किया जा सके। यहां विभिन्न ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल व आयतन को आगमन–निगमन, प्रयोग, प्रदर्शन, प्रयोगशाला व सर्वेक्षण विधियों से प्रभावी ढंग से समझाने का प्रयास किया गया है।

8-2 ppk d e[; fcUn

यहाँ पर मुख्य अधिगम बिन्दुओं को अग्रांकित प्रकार से लिया गया है –

1. घन व घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल के सूत्र की व्युत्पत्ति।
2. बेलन के पृष्ठीय क्षेत्रफल के सूत्र की उत्पत्ति।
3. शंकु के पृष्ठीय क्षेत्रफल के सूत्र की उत्पत्ति।
4. गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल को संप्रत्य।
5. घन व घनाभ के आयतन के सूत्र की उत्पत्ति
6. बेलन के आयतन का सूत्र ।
7. शंकु व गोले के आयतन के संप्रत्यय को जानना

8-3 ppk l vf/kdk'k vi{kk,&

इस विषय वस्तु के शिक्षण के बाद शिक्षार्थी निम्नांकित अधिगम क्रियाओं को जान सकेंगे –

1. विभिन्न ठोस आकृतियों के क्षेत्रफल व आयतन के संप्रत्यय को जान सकेंगे।
2. घन व घनाभ के पृष्ठीय क्षेत्रफल के आगमन व निगमन विधि से निकालने में समर्थ हो सकेंगे।
3. बेलन के पृष्ठीय क्षेत्रफल को विभिन्न विधियों से निकालने में समर्थ हो सकेंगे।
4. शंकु व गोले को पृष्ठीय क्षेत्रफल को निकालना जान सकेंगे।
5. उपरोक्त ठोस आकृतियों के आयतन को निकालना जान सकेंगे।
6. विभिन्न ठोस आकृतियों के क्षेत्रफल व आयतन का अनुप्रयोग हो सकेगें तथा तर्क करने में समर्थ हो सकेंगे।

8-4 f'k{k.k vf/kxe lkexzh

घन – चौक का खाली डिब्बा, पासा, गत्ते, कार्ड बोर्ड, कार्ड शीट, कैंची, स्केल।

घनाभ– पुस्तक, माचिस की डिब्बी

शंकु – पेंसिल को छिलकर बनाना, क्ले, लट्टू, सोफ्ट, जोकर की टोपी

गोला– गेंद, फुटबाल, गोली आदि।

8-5 iLrqrhdj.k & ?ku o ?kukHk

1. घन व घनाभ बनाने के लिए गत्ते, कार्ड बोर्ड अथवा टीन के डिब्बे, लकड़ी का मॉडल दिखाते हुए उनके अवयवों के बारे में परिचित करवाऐं। इसकी सहायता से 6 फलक, 12 कोर और 8 शीर्षों के प्रति संप्रत्यय विकसित करवाऐं।
2. घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल जानने के लिए घनाभ की आकृति के डिब्बे को कोरों से काटकर समझाया जाएगा और सर्वांगसम पृष्ठों के बारे में बताया जायेगा और पृष्ठों को लेते हुए घनाभ के संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र निकालावाऐं।
3. घन के पृष्ठीय क्षेत्रफल को जानने के लिए चॉक के डिब्बे को उपर्युक्त विधि से खोलकर करवाऐं। इसी विधि से ही घन व घनाभ का आयतन भी ज्ञात करवाऐं

4. आयतन के सूत्र (भुजा^{3}) को विभिन्न प्रयोगों द्वारा समझाएँ जाएगा।

प्रयोग –1 अ– एक नापने वाला जार लेते हैं। जार को पानी से भरकर उसका आयतन मापते हैं। अब ऐसा धातु का बना घनाभ लेते हैं जो उस जार में पूरा–पूरा डूबता है।

5. घनाभ को पानी से भरे हुए नपने जार में डालकर रीडिंग लेते हैं। हम देखते हैं कि जार में उतना ही पानी चढ़ेगा, जितना घनाभ का आयतन होगा। सूत्र की सहायता से आयतन निकालकर दोनो के परिणामों को सत्यापित करवाऐं।

i;kx&2

अ– एक लकड़ी का घनाभ लेते हैं जिसकी लम्बाई 5 सेमी, चौड़ाई 4 सेमी और ऊँचाई 2 सेमी है।

ब– हम 1 सेमी भुजा के 50 घन लेते हैं। इनमें से 5 सेमी घन एक सीधी रेखा में रखते हैं। उसके पास 5.5 और घन 4 कतारों में जमा करेंगे। अब इसके ऊपर 1–1 घन और रखकर गिनती कर लेंगे, जिनकी संख्या 40 होगी। इस प्रकार घनाभ का आयतन = 5 x 4 x 2 घन सेमी = 40 सेमी 3 होगा जो लम्बाई, चौड़ाई व ऊंचाई के गुणनफल के बराबर होगा। अर्थात समान मापों वाले आयतों को एक के ऊपर एक रखकर घनाभ बनाया जा सकता है। जिसका आयतन आधार का क्षेत्रफल x ऊँचाई होता है।

cyu& dk iu"Bh; {k=Qy

1. बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए शटल कॉक का खाली डिब्बा लेते हैं, जिनके दोनों ओर वृत्ताकार ढक्कन लगे हों।
2. अब खाली डिब्बे को इस प्रकार काटते हैं कि वह आयताकार आकृति बन जाए।
3. डिब्बे के दोनों वृत्ताकार पृष्ठों व आयताकार पृष्ठ का क्षेत्रफल निकालकर जोड़ देते हैं, जो बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ($2\pi r$

$(r + \lambda)$ ज्ञात हो जाएगा। इसी प्रकार अन्य बेलनाकार आकृतियां लेकर पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं।

cyu dk vk;ru

1. जिस प्रकार समान मापों के आयतों को एक के ऊपर एक रखकर घनाभ बनाया जाता है उसी प्रकार समान मापों के वृत्तों को एक के ऊपर एक रखकर एक बेलन बनाया जा सकता है। इसलिए, उसी तर्क द्वारा जो हमने घनाभ के लिए लिया था कि बेलन का आयतन, आधार के क्षेत्रफल को ऊँचाई से गुणा करने पर प्राप्त होता है। अर्थात यह आयतन वृत्तीय आधार का क्षेत्रफल x ऊँचाई $= \pi r^2 h$ है। इसलिए बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$ है। जाहं r आधार की त्रिज्या और h बेलन की ऊँचाई है।

इसी प्रकार विभिन्न क्रियाओं द्वारा शंकु व गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल व आयतन ज्ञात कर शिक्षार्थी में प्रत्यय बोध किया जा सकता है।

8-6 eY;kadu

1. कितने सेमी की भुजा के घन के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन का संख्यात्मक मान समान होगा।
2. एक बेलन का आयतन 448 पाई वर्ग सेमी तथा ऊँचाई 7 सेमी है, उसका वक्र पृष्ठ ज्ञात करो।

8-7 leg dk;Z &

9 f=dk.kfefr (Trignometry)

9-1 Hkfedk &

हॉगबेन के अनुसार गणित को सभ्यता का दर्पण कहा गया है। गणित के द्वारा शिक्षार्थी की तर्कशीलता व चिन्तनशीलता का विकास किया जा सकता है और अन्वेषणात्मक शक्ति को मजबूत बनाया जा सकता है। गणित की एक नवीन शाखा त्रिकोणमिति है। त्रिकोणमिति के अतिरिक्त गणित की कोई ऐसी शाखा नहीं है, जो उसकी मध्य स्थिति का स्थान ले सके।

त्रिकोणमिति की व्युत्पत्ति ग्रीक शब्दों Tri जिसका अर्थ तीन, gon जिसका अर्थ है भुजा और Metron जिसका अर्थ है माप से हुई है। वस्तुतः त्रिकोणमिति में एक त्रिभुज की भुजाओं और काणों के बीच के सम्बन्धों का अध्ययन किया जाता है। इस अध्याय मं गतिविधियों के आधार पर त्रिकोणमिति को सरलरुप में समझाने का प्रयास किया गया है।

9.2 चर्चा के मुख्यबिन्दु –

1. त्रिकोणमितीय संप्रत्यय
2. त्रिकोणमितीय अनुपात
3. कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात
4. पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात
5. त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाऐं
6. त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

9-3 ppk ls vi{kk,a &

इस अध्याय पर चर्चा के बाद अग्रांकित अपेक्षित व्यवहारगत परिवर्तन हो सकेगा –

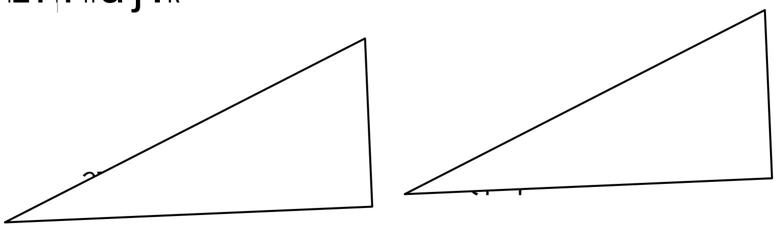
1. त्रिकोणमितीय संप्रत्यय को जान सकेंगे।

2. त्रिकोणमितीय अनुपात त्रिभुज के कोण और उसकी भुजाओं की लम्बाई के बीच संबंध को जान सकेंगे।
3. कुछ विशिष्ठ कोणों व पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात को समझने में समर्थ हो सकेंगे।
4. त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं को समझने में सक्षम हो सकेंगे।
5. त्रिकोणमिति का विभिन्न समस्याओं को हल करने में प्रयोग कर सकेंगे।

9-4 f'k{k.k vf/kxe lkexh

समकोण त्रिभुज बनाने के लिए छड़ व धागा। थियोडोलाइट–एक सर्वेक्षण यंत्र जो त्रिकोणमिति के नियमों पर आधारित है, का प्रयोग एक घूर्णी टेलीस्कोप से कोणों का मापन किया जाता है।

9-5 iLrrhdj.k



किसी समकोण त्रिभुज में समकोण (90 डिग्री) के सामने वाली भुजा कर्ण तथा कोण θ के सामने वाली भुजा लम्ब व शेष भुजा आधार कहलाएगी। शिक्षार्थियों को यह ज्ञान हो जाएगा।

$\text{Sin}\,\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

$\text{Cos}\,\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$

$\text{Tan}\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

$\text{Cot}\,\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

$\text{Sec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$

$\text{Cosec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$

अतः दूसरी $\frac{LAL}{KKA}$ से याद करवा दिया जावेगा

Cirrelation $\quad$ Sin ɵ = $\frac{1}{\text{Cosec } ɵ}$ $\qquad$ Cos ɵ = $\frac{1}{\text{Sec } ɵ}$

Tan ɵ = $\frac{1}{\text{Cot } ɵ}$ $\qquad$ Cos ɵ = $\frac{1}{\text{Sec } ɵ}$

त्रिकोणमितीय कोणों का ज्ञान

सबसे पहले 0 से 4 तक की संख्याऐं लिखेंगे फिर प्रत्येक संख्या को 4 से भाग देकर वर्गमूल लेंगे तो हमारे पास $\frac{\sqrt{0}}{4}$ $\frac{\sqrt{1}}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\frac{\sqrt{4}}{4}$ अतः Sin ɵ = 0

Sec 30^0= ½

Sin 60' = 3/2 Sin 45^0 = 1/J2

Sin $90'$ = 1

	0'	30'	45'	60'	90
Sin ɵ	0	½	1/ 2	J3/21	1
Cos ɵ	1	3/2	1/2	½	0
Tan ɵ	0	1/3	1	3	∞
Cot ɵ	∞	3	1	1/ 3	0
Sec ɵ	1	2/3	2	2	∞
Cosec ɵ	∞	2	2	2	1

Example

fp= cuok,

उदाहरण – जैसे एक नदी के पुल के एक बिन्दु से नदी के सम्मुख किनारे के अवनयन कोण, क्रमश 30^0 और 45^0 है यदि पुल किनारों से 3 मी. की ऊँचाई पर हो तो नदी की चौड़ाई ज्ञात करवाऐं –

हल – आवृत्ति में A और B नदी के सम्मुख किनारों के बिन्दुओं को प्रकट करते हुए जिसमें AB नदी की चौड़ाई है, 3 मी. भी ऊचाई पर बने पुल पर एक बिन्दु P अर्थात DP = 3M है हम नदी की चौड़ाई प्राप्त करना चाहते हैं तो त्रिभुज APB

AB = AD + DB

त्रिभुज $\quad$ समकोण में LA = 30'

अतः $\quad$ Tan 30^0 = $\frac{PD}{AD}$ = $\frac{1}{3}$ = $\frac{3}{AD}$

या $\quad$ AD = 3 / 3

समकोण त्रिभुज PBD में LB = 45' है इसलिए

$$BD = PD = 3m$$
$$AB = BD + AD = 3 + 3/3$$
$$= 3\ (1 + /3)$$

नदी की चौड़ाई 3 (3+1)m Ans.

9-6 eY;kdu

1. भूमि के एक बिन्दु से एक 20मीटर ऊचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मिनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमश 45^0 व 60^0 है। मिनार ऊँचाई ज्ञात करो –

2 7 मीटर ऊचे भवन के शिखर से एक केबल टावर के शिखर का उन्नयन कोण 60^0 है और इसके पार का उन्नयन कोण 45 डिग्री है। टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

leg dk;l &

10- xf.kr i;kx'kkyk ,o ik;ktuk½ dk;

10-1 Hkfedk

साधारणतया गणित विषय के लिए यह कहा जाता है कि यह एक जटिल विषय है, लेकिन यह मात्र एक भ्रम है, इस भ्रम को दूर करना अध्यापक के हाथ में है। वह ऐसा तब कर सकते हैं जब वे इस विषय को रोचक ढंग से प्रस्तुत करें। रोचकता लाने हेतु इन्हें कुछ क्रियाएं सोचनी होगी। व्यवहार में अथवा दैनिक जीवन में गणित को ढूंढना होगा। NCF 2005 के अनुसार कहें तो हमें बालक को मेथेमेटाइजेशन करने से पहले अध्यापक का मेथेमेटाइजेशन करना होगा, चिन्तन में गणित को लाना होगा ऐसा तभी हो सकता है जब हम हमारे मस्तिष्क में आयी अमूर्त क्रियाओं को मूर्त रुप कम दे सकें और यह सम्भव हो सकेगा यदि विद्यार्थी खुद इनका निर्माण कर सके। निर्माण की इस प्रक्रिया में इसकी भागीदारी सुनिश्चित तभी होगी जब विज्ञान की तरह गणित प्रयोगशाला का निर्माण कर सकें।

10--2 ppk d e[; fcUn %&

1. गणित प्रयोगशाला की आवश्यकता एवं महत्ता।
2. गणित प्रायोजनाओं की आवश्यकता एवं महत्ता।
3. गणित प्रयोगशाला में की जाने वाली क्रियाओं के कुछ उदाहरण।
4. गणित प्रायोजनाओं में की जाने वाली क्रियाओं की सूची जिन पर चर्चा की जा सके।

10-3 ppk l vi{kk,&

मॉड्यूल के इस अध्याय का अध्ययन करने के पश्चात आप निम्नलिखित जानकारी प्राप्त कर सकेंगे।

विद्यालयों में गणित प्रयोगशालाओं का निर्माण क्यों –:

1. आवश्यक है एवं इसकी क्या महत्ता है ?
2. गणित प्रयोगशालाओं के माध्यम से विद्यार्थी को क्रिया–आधारित गणित शिक्षण कैसे प्रस्तुत कर सकें।

3. विद्यार्थी के मस्तिष्क में उठे हुये विचारों का गणितीकरण हो सके।

4. अध्यापक स्वयं अपने विचारों का गणितीकरण कर सके।

5. विद्यार्थी के मस्तिष्क में गणित प्रायोजनाओं के निर्माण हेतु विचार–प्रक्रिया बन सके।

6 विद्यार्थी गणित प्रायोजनाओं का निर्माण कर सके।

10-4 f'k{kd vf/kxe lkexzh & सहायक सामग्री निर्माण हेतु आवश्यकतानुसार

10-5 iLrqfrdj.k

1. गणित प्रयोगशाला की आवश्यकता एवं महत्ता –

- गणितीय प्रयोगशाला सर्वप्रथम एक प्रयोगशाला है, जिसमें गणितीय उपकरणों के साथ प्रयोग किये जाते हैं, जैसे अंक एवं ज्यामितीय आकृतियों के नये तरीके खोजना। तथ्य या अवधारणाएं बनाना एवं उन्हें प्रयोग के माध्यम से सिद्ध करना। यह वह स्थान है, जहाँ विद्यार्थी रोमांच एवं उत्साह के साथ उन विधियों को खोजते हैं, जो गणित के लिए तो नवीन नहीं है, लेकिन विद्यार्थियों के लिए नवीनतम विधियाँ है।
- कुछ व्यक्ति गणितीय प्रयोगशाला को एक स्थान विशेष से सम्बन्धित मानते हैं, जहाँ अभिभावकों, अध्यापकों एवं विद्यार्थियों द्वारा चार्टस एवं मॉडल बनाये जाते हैं, जो कि गणित के अमूर्त विचारों को मूर्त में बदलने एवं विद्यार्थियों को समझने में सहायता प्रदान करते हैं।
- गणितीय प्रयोगशाला एक स्थान है जहाँ चार्टस एवं मॉडल के अतिरिक्त केलकुलेटर एवं कम्प्यूटर का प्रयोग भी किया जाता है, जिससे कि विद्यार्थी गणितीय गणना करने में आनन्द ले सके एवं अधिक तीव्रता से हल कर सके।
- इस तरह से गणितीय प्रयोगशाला वह स्थान है जहाँ विद्यार्थी सक्रिय होकर उस अधिगम प्रक्रिया के अन्तर्गत ज्ञान प्राप्त करते हैं, जो कि शीघ्रता से भुला ना सके।

2- xf.kr ik;ktukvk dh vko';drk ,o egÙo &

- विद्यार्थियों द्वारा पहले से पढ़ाये गये सम्प्रत्ययों के प्रति गहन समझ।
- गणितीय अनुप्रयोगों की समझ।
- गणित के नवीन प्रकरण के अवबोध के लिए जो कि विद्यार्थी द्वारा कक्षा कक्ष में पहले से सीखा जा चुका है, उसके विस्तार के लिए।
- वातावरण के कुछ तथ्य जो कि गणित से सम्बन्धित है, लेकिन कक्षा—कक्ष में नहीं पढ़ाये गये हैं।
- गणितीय प्रयोगशालाओं में समस्या—समाधान सत्र के दौरान वरिष्ठ छात्रों द्वारा अपने से छोटी कक्षा के विद्यार्थियों की समस्या के समाधान में सहायता करना।
- गणितीय प्रयोगशाला में विद्यार्थी परस्पर विचार—विमर्श करते हैं एवं अध्यापकों द्वारा निष्कर्ष प्राप्ति में सहायता की जाती है। इस प्रकार वे अधिगम प्रक्रिया में सक्रिय भागीदार बन सकते हैं।

3- fo|kfFk;k }kjk dh tkus okyh xfrfrf/k;k dh lph &

1. गणित का इतिहास
2. भारतीय गणितज्ञ
3. तटस्थ भवनों/आकृतियों के विभिन्न आकारों का अध्ययन करना एवं ज्ञात करना कि ऐसी क्यों है ?
4. हॉकर्स एवं वेन्डर्स द्वारा प्रतिपादित मौखिक गणनाओं की विभिन्न विधियों का अध्ययन।
5. विभिनन बिलों जैसे बिजली, पानी, टेलीफोन आदि का अध्ययन करना।
6. विभिन्न मुद्रा नोटों जैसे 10, 20, 50, 100 और 500 का अध्ययन।
7. संख्या तंत्र के विकास का इतिहास।
8. चार भारतीय गणितज्ञों एवं उनके योगदान पर लेख लिखना।
9. चार भारतीय गणितज्ञों के विकास का इतिहास।
10. गणित में पुनर्रचनात्मक खेल।

11. गणित में प्रश्नोत्तरी एवं पहेलियां।
12. अध्यापकों के अनुभवजनित कक्षा 6 से 10 तक के विद्यार्थियों द्वारा की जाने वाले गलतियों की सूची।
13. पाइथोगोरस प्रमेय के विभिन्न प्रमाण।
14. जीवन में सांख्यिकी के उपयोग।
15. जीरो (शून्य) का अध्ययन।
16. घड़ी अकंगणित।
17. दैनिक जीवन में त्रिकोणमिती के अनुप्रयोग।
18. पिरामिडीय संख्याओं का त्रिकोणमितीय एवं वर्ग संख्याओं के साथ सम्बन्ध।
19. दैनिक जीवन में ज्यामिती का उपयोग।
20. कम्प्यूटर का इतिहास।
21. ग्राफिकल विधि द्वारा दो चरों में रेखिक समीकरणों के दिये गये जोड़ों की निरन्तरता एवं अनिरन्तरताा की स्थितियों के बारे में जानकारी प्राप्त करना।
22. कागज काटने एवं चिपकाने की विधि द्वारा सत्यापित करना कि दिया गया क्रम एक अंकगणितीय प्रगति है।
23. चित्रात्मक विधि द्वारा सत्यापित करना कि प्रथम N प्राकृत संख्याओं का योग $\frac{n(n+1)}{2}$ होता है।
24. एक क्रियात्मक विधि द्वारा सत्यापित करना कि प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योग n^2 होता है।
25. समान्तर क्रम बोर्ड एवं त्रिकोणीय कटआउट्स का प्रयोग करते हुए आधार समानता प्रमेय की सत्यापित करना।
26. कागज मोड़ना, काटना एवं चिपकाना विधि द्वारा पाइथोगोरस प्रमेय को सत्यापित करना।
27. कागज मोड़ना, काटा एवं चिपकाना विधि द्वारा सत्यापित करना कि वृत्त के बाहर दूर स्थित बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाएं समान होती है।
28. सुझावात्मक प्रदर्शन विधि सूत्र उत्पन्न करना कि वृत का क्षैत्रफल, वृत्त की परिधि एवं त्रिजया के गुणा का आधा होता है।

(अ) कालिंग विधि से।

(ब) कागज काटना एवं चिपकाना विधि।

29. सत्यापित करना कि किसी त्रिभुज के केन्द्रक द्वारा समान भुजा 'r' के बनाये गये तीन भागों के क्षेत्रफलों का योग $\frac{rr^2}{2}$ होता है।

30 दो वृत्ताकार बेलनों के वक्र पृष्ठों के क्षेत्रफलों की तुलना करना जो कि उस आयताकार पृष्ठ से बनाये गये हैं, जिसमें समान विमाएं है।

(अ) दो वृत्तकार बेलनों के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफलों की तुलना करना जो कि उस आयताकार पृष्ठ से बनाये गये है, जिसमें समान विमाएं है।

31. दो वृत्ताकार बेलनों के आयतनों की तुलना करना जो कि उस आयताकार पृष्ठ से बनाये गये हैं, जिसमें समान विमाएं है।

उदाहरण स्वरूप कुछ प्रायोजनाएं यहाँ प्रस्तुत की जा रही है।

lgk;d lkexh fuek.k

1. सहायक सामग्री का नाम – वृत्त के क्षेत्रफल का मॉडल

प्रकरण जिसक लिए प्रयुक्त की जा सके – वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 के सत्यापन हेतु।

बनाने हेतु सामग्री – प्लाई, पेन्ट (Paint), कील, चाकू (Cutter)

मॉडल बनाने की विधि – सर्वप्रथम हम 25" x 25" की एक प्लाई लेंगे। फिर इसके केन्द्र से 21 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त बनायेंगे। अब इस वृत्त को समान कोणों के आधार पर 16 भागों में काट कर अलग कर देंगे। प्रत्येक भाग (strip) का कोण 360^0 = 22.5^0 होगा। अब वृत्त की प्रत्येक पट्टी (strip) पर क्रमांक लिखकर उन पर एक–एक कील इस प्रकार लगायेंगे कि कील का कुछ भाग बाहर की तरफ निकला रहे। जिसकी सहायता से हम इन पट्टियों को वृत्त में लगा सके या वृत्त में से निकाल सकें तथा साथ ही प्रत्येक पट्टी पर एक–एक छिद्र भी बनायेंगे।

अब हम एक अन्य 70" x 25" की प्लाई लेंगे इस पर 64" x 21" का एक समान्तर चतुर्भुज बनायेंगे। अब इस समान्तर चतुर्भुज में समान दूरी पर आठ कीले लगायेंगे।

इस समान्तर चतुर्भुज में हम वृत्त की सभी पट्टियों को एक निश्चित क्रम में व्यवस्थित करेंगे।

इस प्रकार उपरोक्त उद्देश्य प्राप्त करने हेतु हमारा प्रकरण दो भागों में पूर्ण होता है – (1) वृत्त, (2) समान्तर चतुर्भुज

कार्य प्रणाली – हमने $r = 21$ cm त्रिज्या का वृत्त बनाया है। अतः इस वृत्त की प्रत्येक पट्टिका की लम्बाई 21 सेमी होगी। प्रत्येक strip का कोण $\frac{360^0}{16} = 22.50$ होगा।

हम जानते है कि वृत्त की परिधि $= 2\pi r$ होती है।

अतः हम इसकी सहायता से प्रत्येक पट्टि के चाप की लम्बाई ज्ञान कर सकते हैं। चूँकि सम्पूर्ण वृत्त 16 भागों में विभाजित है। अतः

16 पट्टियों के चापों की कुल लम्बाई $= 2\pi r$

1 पट्टि के चाप की लम्बाई $= \frac{2\pi r}{16} = \pi r$

हम इन पट्टियों को समान्तर चतुर्भुज में चित्रानुसार व्यवस्थित करेंगे इस प्रकार समान्तर चतुर्भुज की लम्बाई πr होगी व समान्तर चतुर्भुज की चौड़ाई r होगी।

हम जानते है कि समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

$= 2\pi r \times r = \pi r^2$ होगा

जो कि वृत्त का क्षेत्रफल है।

अतः स्पष्ट होता है कि वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 होता है।

सहायक सामग्री का नाम – सकेन्द्रीय वृतों के मध्य के क्षेत्रफल का मॉडल।

प्रकरण जिसके लिए प्रयुक्त की जा सके – सकेन्द्री वृतों के मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात करने हेतु।

बनाने हेतु सामग्री – प्लाई, पेन्ट, फेवकोल/कील, काटने के चाकू (cutter)

मॉडल बनाने की विधि – सर्वप्रथम हम एक 24" x 24" इंच की एक प्लाई लेंगे। फिर इसके केन्द्र से 25 सेमी त्रिज्या का एक वृत बनायेंगे। इसी केन्द्र से 13 सेमी त्रिज्या

का एक अन्य वृत बनायेंगे। इस 13 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त (1) व 25 सेमी त्रिज्या वाले वृत को वृत्त (2) का नाम देंगे। अब वृत्त (1) को कटर से काटर कर अलग कर देंगे।

अब वृत्त (1) के केन्द्र से एक सिधी रेखा इसकी सतह तक खीचेंगे जो वृत्त (1) की त्रिज्या r_1 को दर्शायगी। अब वृत्त (1) के केन्द्र पर नॉब लगायेंगे और अब वृत्त (1) को पुनः वृत्त (2) में व्यवस्थित कर देंगे।

चूँकि दोनों वृत्तों का केन्द्र एक ही है, अतः वृत्त (1) के केन्द्र से एक अन्य सीधी रेखा वृत्त (2) की सतह तक खीचेंगे जो वृत्त (2) की त्रिज्या r_2 को प्रदर्शित करेगी।

अब हम एक अन्य की 24″ x 24″ इंच की एक प्लाई लेंगे। इस प्लाई को हम पहले वाली प्लाई के नीचे फेविकोल/कील से चिपका देंगे।

इस प्रकार से हमारा उपरोक्त मॉडल बनकर तैयार हो जायेगा।

कार्य प्रणाली – वृत्त (1) को वृत्त (2) से अलग कर देने पर हमें जो क्षेत्रफल का प्राप्त होता है वहीं क्षेत्रफल संकेन्द्रीय वृत्तों के मध्यम का क्षेत्रफल होगा। जो कि हमें ज्ञात करना है।

इसके लिए यदि हम वृत्त (2) के क्षेत्रफल में से वृत्त (1) के क्षेत्रफल घटा दे तों हमें सकेन्द्री वृतों के मध्य का क्षेत्रफल प्राप्त हो जायेगा।

हम जानते है कि r त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 होता है।

अतः r^2 त्रिज्या वाले वृत्त (2) का क्षेत्रफल πr_2 व r_1 त्रिज्या वाले वृत्त (1) का क्षेत्रफल $\pi \quad r^2$ होगा।

हमें वृत्त (2) के क्षेत्रफल में से वृत्त (1) का क्षेत्रफल घटाना है।

अतः सकेन्द्री वृत्तों के मध्य का क्षेत्रफल $= \pi r^2{}_2 = \pi r^2{}_1$

$= (r^2{}_2 - r^2{}_{21})$

इस प्रकार सकेन्द्री वृत्तों के मध्य का क्षेत्रफल $\pi(r^2{}_2 - r^2{}_1)$ होता है। ,

I gk;d I kexh dk uke &

दो समान्तर रेखाओं के बीच समान आधार वाले त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान होता है।

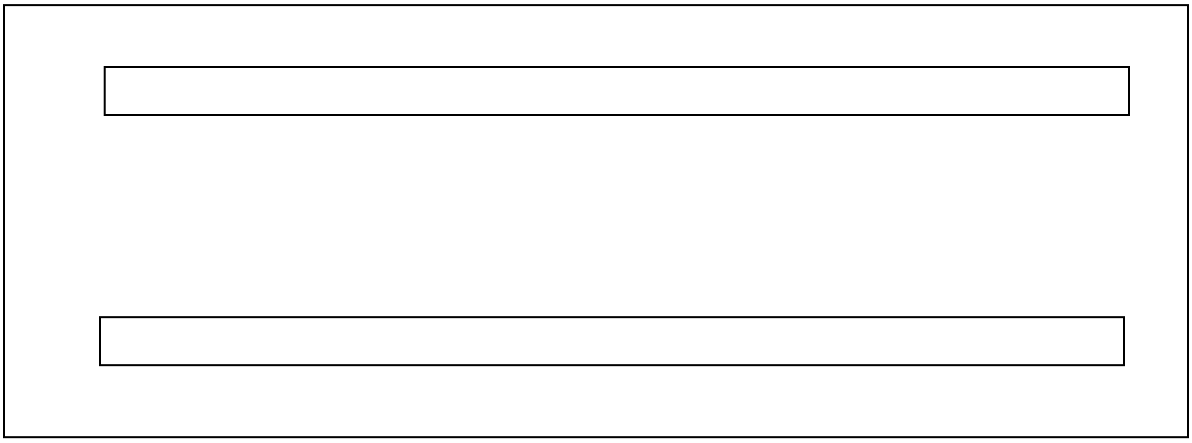
i:dj.k] ftl d: fy, i:;|ä dh tk ld: &

चित्र में दिखाएं अनुसार दो समान्तर रेखाओं l व m ममें आधार AB पर बने विभिन्न त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान होता है।

cuku: gr| lkexh &

25／15 इंच की प्लाई फ्रेम, रंग, ब्रश, कीले, प्रत्यास्थ डोरियां दो 23 इंच लम्बी लकड़ी की बनी पट्टी आदि।

चित्र –



ekMy cuku: dh fof/k &

सर्वप्रथम प्लाई की सतह को काले रंग से पेन्ट करेंगे। एवं लकड़ी की दोनों पट्टियों को सफेद रंग से पेन्ट करेंगे। सूखने के बाद दोनों पट्टियों को प्लाईवुड की लम्बाई के समान्तर व परस्पर समान्तर फिक्स कर देंगे।

अब चित्र में दिखाए अनुसार विभिन्न बिन्दुओं पर कीले लगाएंगे। आधार AB पर डोरी बांधेंगे तथा एक अन्य डोरी को A व B से इस प्रकार बांधेंगे कि इसे दूसरी पट्टिका के विभिन्न बिन्दुओं (कीलों) पर टंगाया जा सके। इस प्रकार विभिन्न त्रिभुजों की ऊँचाई ज्ञात करने के लिए एक अन्य डोरी लेते हैं।

कार्य–प्रणाली – हम जानते है कि आधार AB पर बंधी प्रत्यास्थ डोरी को दूसरी पट्टिका के विभिन्न बिन्दुओं C, P, D तथा E पर लगाने से त्रिभुज ΔABC, ΔABD तथा ΔABE क्रमशः प्राप्त होते हैं।

त्रिभुज का क्षेत्रफल = ½ x आधार x ऊँचाई

अर्थात् त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार एवं ऊँचाई पर निर्भर करता है। उपयुक्त सभी त्रिभुजों का आधार AB ही है। इनकी ऊँचाई क्रमशः CS, BP, DF तथा GE है। जो कि समान्तर रेखाओं के बीच की लम्बवत दूरीयां है।

हम जानते हैं कि समान्तर रेखाओं के बीच की दूरीयां सदैव बराबर होती है। अतः सभी त्रिभुज समान ऊँचाई के है। जिनकी ऊँचाई को हम डोरी से भी नाम सकतें है।

सिद्ध है कि सभी त्रिभुज समान क्षेत्रफल के हैं।

10-6 eY;kdu &

1. गणित प्रयोगशाला क्यों आवश्यक है ?
2. प्रायोजना कार्य की क्या उपयोगिता है ?

10-7 leg dk;l

11- i'u i= fuekZ.k

11-1 Hkfedk

किसी कार्य को करने के पीछे कोई न कोई उद्देश्य होता है। उद्देश्य की प्राप्ति के लिये हम योजनाबद्ध तरीके से कार्य करते हैं कुछ समय पश्चात् यह जानने की इच्छा होती है कि जो उद्देश्य निर्धारित किये थे उनको प्राप्त करने में कहां तक सफलता प्राप्त हुई है। यह कार्य मूल्यांकन के द्वारा किया जा सकता है।

मूल्यांकन के अलिनेक प्रविधियों का प्रयोग होता है। परीक्षा मूल्यांकन की एक प्रविधि है जिसका प्रयोग गणित विषय में अधिकतम किया जाता है। परीक्षा लिखित, मौखिक एवं प्रायोगिक रूप में हो सकती है। यहां पर लिखित परीक्षा हेतु प्रश्न–पत्र निर्माण की प्रक्रिया दी जा रही है ?

11-2 ppk@fØ;k dyki d e[; fcUn

1. परीक्षण की योजना
2. इकाई परख का निर्माण

11-3 ppk l vi{kk;

आप इस अध्याय को पढ़कर यह जान पायेंगे कि –

- इकाई परख का निर्माण करने से पूर्व उसकी योजना किस प्रकार से बनायी जाती है।
- इकाई परख के अन्तर्गत उद्देश्यों को किस क्रम में लेना है तथा उनका भारांकन किस प्रकार होगा ?
- एक इकाई को उपइकाईयों में विभक्त करना
- इकाई एवं उसकी उपइकाइयों में से विभिन्न प्रकार के प्रश्नों का चयन करना।
- परीक्षण की योजना (नील पत्र) बनाना
- नील पत्र के आधार पर इकाई परख का निर्माण करना।

11-4 f'k{k.k & vf/kxe lkexzh &

पारदर्शी, पारदर्शी मार्कर, कार्डसीट, पुस्तक, स्केल, पेन, पेन्सिल, रबर इत्यादि।

11-5 iLrqrhdj.k

इकाई का नाम – बेलन, शंकु और गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

1- ijh{k.k dh ;kstuk &

जिस प्रकार भवन का निर्माण करने से पहले उसका एक नक्शा बना लिया जाता है तथा कारीगर उसी नक्शे के आधार पर भवन का निर्माण करता है उसी प्रकार एक इकाई परख के निर्माण से पूर्व उसकी योजना बनायी जाती है, जिसे नील पत्र/आधार पत्र कहा जाता है। आधार पत्र का निर्माण (ब्ल्यू प्रिन्ट)

v& f'k{k.k mn~ns';ksa dk vad Hkkj

इकाई परख हेतु जिन उद्देश्यों की उपलब्धि का पता लगाना है, उन्हें अंक भार दिया जाता है।

Øe la-	f'k{k.k mn~ns';	vad	izfr'kr
1	ज्ञान	02	10
2	अवबोध	04	20
3	अनुप्रयोग	04	20
4	कौशल	10	50
योग		20	100

c& bdkbZ@mibdkbZ;ksa dk vadHkkj

इकाई परख हेतु जिन इकाई/उपइकाईयों को सम्मिलित करना है, उनको अंकभार दिया जाता है।

Øe la-	f'k{k.k mn~ns';	vad	izfr'kr
1	लम्ब वृत्तीय बेलन	04	20
2	खोखला बेलन	04	20
3	शंकु	06	30
4	गोला	06	30
योग		20	100

l& iz'uksa ds izdkjksa ds vk/kkj ij vad Hkkj

इकाई परख हेतु प्रश्नों के प्रकारों के आधार पर अंक भार दिया जाता है तथा प्रश्नों की संख्या भी निर्धारित की जाती है –

Ø-la-	iz'uksa ds izdkj	iz'uksa dh la[;k	vad Hkkj	izfr'kr
1	वस्तुनिष्ठ	08	04	20
2	अति–लघुत्तरात्मक	04	04	20
3	लघुत्तरात्मक	02	04	20
4	निबन्धात्मक	02	08	40
योग		16	20	100

i'u i= dk vk/kkj i=d

शिक्षण उद्देश्य	ज्ञान				अवबोध				अनुप्रयोग				कौशल				योग
प्रश्नों के प्रकार (इकाई / उपइकाई)	वस्तुनिष्ठ	अति–लघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	अति–लघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	अति–लघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	निबन्धात्मक	वस्तुनिष्ठ	अति–लघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	निबन्धात्मक	अंकों व प्रश्नों का योग
लम्बवृत्तीय बेलन	½ (2)	–	–	–	–	1(2)	–	–	–	–	–	–	1(2)	–	–	–	4 (6)
खोखला बेलन	½ (2)	–	–	–	–	1(1)	–	–	–	–	2(1)	–	–	–	–	–	4 (4)
शंकु	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2(1)	–	–	–	–	4 (1)	6 (2)
गोला	–	–	–	–	–	1(1)	–	–	–	–	–	–	½ (2)	–	–	4 (1)	6 (4)
योग	2(4)	–	–	–	–	4(4)	–	–	–	–	4(2)	–	2 (4)	–	–	8 (2)	20 (16)

नोट – कोष्ठक के अन्दर प्रश्नों की संख्या एवं कोष्ठक के बाहर अंकभार दर्शाया गया है।

bdkbZ iz'u i=

fo"k; & xf.kr

le; & 1 ?k.Vk d{kk&nloha i.kkZd & 20

नोट – सभी प्रश्नों को हल करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न के आगे अंक दिये गये हैं।

1. लम्बवृत्तीय बेलन के पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र है – ½

(1) $\pi r^2\lambda$ (2) $2\pi r\lambda$ (3) $2\pi r(r + h)$ (4) $\pi r(r + h)$

2. लम्बवृत्तीय बेलन के आयतन का सूत्र है – ½

(1) $½\pi r^2\lambda$ (2) $1/3\pi r^2\lambda$ (3) $\pi r^2\lambda$ (4) $\pi r^3 \lambda$

3. खोखला बेलन, बेलनों से मिलकर बनता है – ½

(1) 2 (2) 3 (3) 1 (4) 4

4 खोखले वेतन के वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल का सूत्र होता है –

(1) $2\pi(r_1 + r_2)$ (2) $2\pi(r_1 + r_2)\lambda$ (1) $\pi(r_1 + r_2)$ (2) $\pi(r_1 + r_2)\lambda$

5. बेलनाकार बोतल का व्यास 10 सेमी है। यदि उसमें 14 सेमी ऊँचाई तक द्रव भरा हो तो द्रव का आयतन है –

(1) 1200 घन सेमी (2) 1100 घन सेमी
(3) 1500 घन सेमी (4) 1150 घन सेमी

6. यदि एक बेलन की ऊँचाई 11 सेमी और वक्र पृष्ठ 968 वर्ग सेमी है, तो बेलन की त्रिज्या है –

(1) 3 सेमी (2) 7 सेमी (3) 3.5 सेमी (4) 14 सेमी

7. सीसे के एक घन की कोर 11 सेमी है। घन को पिघलाकर 1 सेमी व्यास की गोलियां बनाई जा सकती है –

(1) 2541 (2) 2154 (3) 5245 (4) 1245

8. यदि दो गोलों की त्रिज्याओं का अनुपात 2:3 है, तो उनके आयतन का अनुपात है

(1) 7 : 8 (2) 8 : 27 (3) 4 : 9 (4) 1 : 27

9. ठोस लम्बवृत्तीय बेलन के आयतन व π त्रिज्या r व ऊँचाई λ में क्या सम्बन्ध होता है?

10. ठोस लम्बवृत्तीय बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिये कौनर–कौनसी राशियों की आवश्यकता होती है ?

11. खोखले बेलन का आयतन $\pi(r_1^2 + r_2^2)\lambda$ सूत्र से ज्ञात किया जाता है। सूत्र में त्रुटि बनाईये।

12. ठोस अर्द्ध गोले एवं खोखले अर्द्ध गोले के सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफलों के सूत्रों में क्या अन्तर होता है ?

13. लम्बवृत्तीय बेलन के आयतन के सूत्र का उपयोग दैनिक जीवन में कहां–कहां होता है ? चार उदाहरणों द्वारा स्पष्ट कीजिये

14. शंकु के आयतन के सूत्र को प्रायोगिक रूप से बताईये।

15. एक शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात 3:4 है। यदि इसका आयतन 301.44 घनसेमी हो तो शंकु की त्रिज्या और तिर्थक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

16. यदि एक गोले का आयतन 38808 घनसेमी है तो गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

11-6 eY;kdu

1. परीक्षण की योजना (नील पत्र) बनाने की उपयोगिता है ?
2. ज्ञान, अवबोध, अनुप्रयोग एवं कौशल पर आधारित प्रश्नों के उदाहरण दीजिए।

11-7 leg dk;l &

सम्भागी अपने–अपने समूहों में इकाई परख का निर्माण करेंगे ।

xf.kr dk n'kZu & NCF 2005 ds lanHkZ esa

गणित की शिक्षा का मुख्य उद्‌देश्य बच्चे की गणितीकरण की क्षमताओं का विकास करना है। स्कूली गणित का सीमित लक्ष्य है 'लाभप्रद' क्षमताओं का विकास, विशेषकर अंक ज्ञान–संख्या से जुड़ी क्षमताएँ, सांख्यिक संक्रियाएं, माप, दशमलव व प्रतिशत। इससे उच्च लक्ष्य है बच्चे के साधनों को विकसित करना ताकि वह गणितीय ढंग से सोच सके व तर्क कर सके, मान्यताओं के तार्किक परिणाम निकाल सके और अमूर्त को समझ सके। इसके अन्तर्गत चीजों को करने और समस्याओं को सूत्रबद्ध करने व उनका हल ढूंढने की क्षमता का विकास करना आता है।

इसके लिए ऐसी पाठ्यचर्या चाहिए जो महत्वाकांक्षी हो, सुसंगत हो और गणित के महत्वपूर्ण सिद्धान्तों को पढ़ाए। उसे महत्वाकांक्षी इस अर्थ में होना चाहिए कि वह उपरोक्त उच्च लक्ष्य की प्राप्ति का प्रयास करे न कि केवल सीमित लक्ष्य की प्राप्ति का। इसे सुसंगत होना चाहिए। ताकि टुकड़े–टुकड़े में उपलब्ध विभिन्न प्रणालियाँ व शिक्षा (अंकगणित, बीजगणित, रेखागणित में) एक ऐसी क्षमता में ढल सके जो माध्यमिक कक्षाओं में आने वाले विज्ञान व सामाजिक अध्ययन के क्षेत्र की समस्याओं को भी संबोधित कर सके। यह इस अर्थ में महत्वपूर्ण होना चाहिए कि विद्यार्थी ऐसी समस्याओं को हल करने की आवश्यकता को महसूस करे और शिक्षक व विद्यार्थी दोनो ऐसी समस्याओं को हल करने में जो अपना समय और ऊर्जा लगाएँ उसे सदुपयोग मानें। गणित की पाठ्यचर्या के दो मुख्य सरोकार हैं – गणित शिक्षा प्रत्येक विद्यार्थी के दिमाग को आकर्षित करने के लिए क्या कर सकती है, और वह विद्यार्थी के संसाधनों को कैसे सुदृढ़ कर सकती है ?

चूंकि गणित माध्यमिक स्कूल तक एक अनिवार्य विषय है, अतः अच्छी गणित शिक्षा का अधिकार प्रत्येक बच्चे को है। यह शिक्षा सुखकर व सहज होनी चाहिए। शिक्षा के भूमंडलीकरण के संदर्भ में, से पहला प्रश्न उठता है, आठ सालों की स्कूली शिक्षा के दौरान बच्चे को कैसा गणित पढ़ाना चाहिए जो उसे केवल उच्च माध्यमिक शिक्षा के लिए ही तैयार न करे बल्कि जीवनभर उसके काम आए। प्राथमिक स्कूल में सिखाए जाने वाले गणित के अधिकतर कौशल उपयोगी होते हैं। बहरहाल, पूर्ववर्णित 'उच्चतर लक्ष्यों' की प्राप्ति के लिए

पाठ्चर्या के पुनः अभिमुखीकरण से बच्चे उस समय का बेहतर उपयोग कर सकेंगे जो वे स्कूल में व्यतीत करते हैं। उनकी समस्या हल करने व विश्लेषण करने का कौशल पुष्ट होगा और जीवन में वे विभिन्न तरह की समस्याओं का बेतरह रूप से सामना कर सकेगे। साथ ही गणित की पाठ्यचर्या के लम्बे–चौड़े आकार (जिसमें एक विषय में

Ldwyh xf.kr f'k{kk dh dqN leL;k,¡

1. बहुत से बच्चे गणित से डरते हैं और इस विषय में असफलता से भयभीत रहते हैं। वे जल्दी ही गणित की गंभी पढ़ाई से विमुख हो जाते हैं।
2. यह पाठ्यचर्या केवल इससे विमुख होने वालों के लिए ही निराशाजनक नहीं है बल्कि यह प्रतिभाशाली बच्चों के लिए भी कोई चुनौती नहीं पेश करती।
3. समस्याएँ, अभ्यास व मूल्यांकन पद्धति यांत्रिक है और दुहरावग्रस्त है। इसमें संगणना पर अत्यधिक जोर दिया गया है। इसमें स्थानिक चिंतन जैसे गणितीय क्षेत्रों को पर्याप्त स्थान नहीं दिया गया है।
4. अध्यापकों में आत्मविश्वास, व तैयारी की कमी है और उन्हें आवश्यक मदद भी नहीं मिल पाती।

दक्षता दूसरे के ज्ञान के लिए आवश्यक होती है।) पर दिए जाने वाले जोर को कम करना चाहिए, ताकि एक वृहत्तर पाठयचर्या तैयार हो पाए, जिसमें वे विषय अधिक हों जो बुनियादी बातों से प्रारम्भ होते हों। यह विािन्न विद्यार्थियों की आवश्यकताओं को बेहतर ढंग से पूरा कर पाऐंगे।

Ldwyh xf.kr dk n'ku

- बच्चे गणित से भयभीत होने के बजाए उसका आनन्द उठाऐं
- बच्चे महत्वपूर्ण गणित सीखें; गणित में सूत्रों व यांत्रिक प्रक्रियाओं से ओ भी बहुत कुछ है।
- बच्चे गणित को ऐसा विषय मानें जिस पर वे बात कर सकते हैं, जिससे संप्रेषण हो सकता है, आपस में जिस पर चर्चा कर सकते हैं और जिस पर साथ–साथ काम कर सकते हैं।
- बच्चे सार्थ समस्याएँ उठाएँ और उन्हें हल करें।
- बच्चे अमूर्त का प्रयोग संबंधों को समझने, संरचनाओं को देख पाने और चीजों का विवेचन करने, कथनों की सत्यता या असत्यता को लेकर तर्क करने में कर पाऐं।

- बच्चे गणित की मूल संरचना को समझेंः अंकगणित, बीजगणित, रेखागणित त्रिकोणमिति। स्कूली गणित के सभी मूल तत्व अमूर्त की प्रणाली, संघटन और सामान्यीकरण के लिए पद्धति मुहैया कराते हैं।
- अध्यापक कक्षा में प्रत्येक बच्चे के साथ इस विश्वास के आधार पर काम करें कि प्रत्येक बच्चा गणित सीख सकता है।

समस्या के समाधान की अनेक सामान्य युक्तियां स्कूल की विभिन्न अवस्थाओं में सिखाई जा सकती है : अमूर्तता, परिमाणन, सादृश्यता, स्थिति विश्लेषण, समस्या को सरल रूप में बदलना, अनुमान लगाना व उसकी पुष्टि करना – ये समस्या समाधान के अनेक संदर्भो में उपयोगी है। जब बच्चे ये विभिन्न युक्तियाँ सीख लेते हैं तो उनके संसाधन समृद्ध हो जाते हैं और वे यह भी सीखते हैं कि कौन–सी युक्ति सर्वश्रेष्ठ है। बच्चों को गणित के अन्वेषणात्मक नियमों से परिचय की आवश्यकता होती है न कि केवल इस विश्वास की कि गणित एक 'सटीक विज्ञान' है। परिणाम और हलों का अनुमान भी एक आवश्यक कौशल है। जब एक किसान किसी फसल का अनुमान लगाता है तो अनुमान लगाने के कौशल, जैसे सन्निकटता और इष्टीकरण के कौशलों का उपयोग होता है। स्कूली गणित की इस तरह की उपयोगी बातें सिखाने और उनके परिष्कार में महत्वपूर्ण भूमिका है।

प्रत्यक्षीकरण और निरूपण ऐसे कौशल हैं जिनको विकसित करने मं गणित सहायक हो सकता है। परिमाण, आकार व रूपों का प्रयोग करके स्थितियों का प्रतिरूपण करने में गणित का सर्वश्रेष्ठ प्रयोग होता है। गणितीय अवधारणाओं को कई तरीकों से निरूपित किया जा सकता है और ये निरूपण विभिन्न संदर्भों में विविध प्रयोजनों का काम करते हैं – यह सब गणित की सामर्थ्य को बढ़ाता है। उदाहरण के लिए एक भिन्न को बीज गणितीय तौर पर निरूपित किया जा सकता है और एक ग्राफ के रूप में भी। अब अगर अ/ब को एक पूर्ण इकाई के एक अंश के रूप में प्रस्तुत किया गया है तो वह दो अंकों अ तथा ब के भागफल को भी इंगित कर सकता है। भिन्न खण्डों के बारे में यह सीखना भी उतना ही महत्वपूर्ण है जितना कि भिन्न अंशों के गणित को सीखना।

गणित व अन्य विषयों के अध्ययन के बीच संबंध बनाने की भी आवश्यकता है। जब बच्चे ग्राफ बनाना सीखते हैं तो उन्हें भू–विज्ञान सहिजत विीिन्न विज्ञानों के कार्यात्मक संबंधों के बारे में सोचने के लिए भी प्रोत्साहित करना चाहिए। हमारे बच्चे इस तयि के मूल्य को पहचान पाएँ कि गणित, विज्ञान के अध्ययन का एक प्रभावी उपकरण है।

गणित में व्यवस्थित तार्किकता के महत्व पर प्रबलता से जोर नहीं दिया जा सकता। यश्ह गणितज्ञों की सौष्ठव और सौन्दर्य–बोध जैसी अत्यन्त प्रिय धारणाओं से गहरे रूप मं जुड़ा हआ है। प्रमाण महत्वपूर्ण है, लेकिन निगमनात्मक (निगमन–आधारित) प्रमाण के साथ बच्चों को यह भी जानना चाहिए कि चित्र व निर्मित प्रमाण कब प्रदान कर सकते हैं। प्रमाण देना एक ऐसी प्रक्रिया है जो संशय करने वाले विरोधी पक्ष को आश्वस्त करने के लिए आवश्यक है; स्कूली गणित के माध्यम से प्रमाण को व्यवस्थित तक–वितर्क के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। तक विकसित करने, उसका मूल्यांकन करने, अनुमेयों के निर्माण और उनकी पड़ताल करने की क्षमताओं का विकास स्कूली गणित का लक्ष्य होना चाहिए तथा यह समझ भी होनी चाहिए कि तर्क करने के विभिन्न तरीके होते हैं।

गणितीय संप्रेषण, जो सटीक होता है उसमें सुस्पष्ट भाषा का प्रयोग एवं सख्त संरूपण होता है। ये गणित के महत्वपूर्ण लक्षण हैं। गणित में पारिभाषिक शब्दावली का प्रयोग सुचिंतित, सचेत और विशिष्ट शैली में होता है। गणितज्ञ इस पर विचार करते हैं कि कौन–सी अंकन पद्धति उपयुक्त है क्योंकि अच्छी अंकन पद्धति को विचारों का सहायक माना जाता है। जैस–जैसे बच्चे बड़े होते हैं उन्हें इन प्रथाओं की महत्ता को समझना व उनका प्रयोग करना भी सिखाना चाहिए। उदाहरण के लिए, समीकरण बनाने को भी उतना ही महत्व मिलना चाहिए जितना उन्हें हल करने को दिया जाता है।

ऐसे कई कौशलों और प्रक्रियाओं की चर्चा करते हुए हमने अभिगमों और क्रियाविधियों की बहुलता की बात की है। ये सभी स्कूली गणित को सिफ पढ़ाए गए 'कलन विधि' के इस्तेमाल की तानाशाही से उमुक्त करने के लिए जरूरी है।